UNIVERSIDAD ANTONIO RUIZ DE MONTOYA

Facultad de Filosofía, Educación y Ciencias Humanas

ESTUDIO DEL PROCESO DE INSTRUMENTALIZACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL MEDIADO POR EL GEOGEBRA CON ESTUDIANTES DEL NIVEL SECUNDARIO EN UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA

Tesis para optar al Título Profesional de Licenciado en Educación Secundaria con Especialidad de Matemática

Presenta el Bachiller

ALVARO VICTOR REDUCINDO ALVAREZ

Presidente: Alier Ortiz Portocarrero

Asesor: Milagros Edith Carrillo Yalán de Mendoza

Lector: Daysi Julissa García Cuéllar

Lima – Perú

Octubre de 2022

EPÍGRAFE

El futuro tiene muchos nombres.
Para los débiles es lo inalcanzable.
Para los temerosos, lo desconocido.
Para los valientes es la oportunidad

Victor Hugo

DEDICATORIA

A Valeria

Mi futura esposa, compañera, motivación principal, que con su amor, cariño y paciencia ha hecho de mi vida universitaria la mejor de todas

A Franchi

Mi abuela, mi segunda madre, mi alegría espiritual del día a día, por hacer mis días a días más tiernos

A mis padres

Mi madre por sus buenos consejos, valores y su gran fortaleza, y mi gentil padre, por darme el carácter, la alegría y contagiarme de su personalidad tan amigable

AGRADECIMIENTO

A mi profesora de toda mi vida universitaria, a la futura Dra. Milagros Carillo Yalán, asesora de mi investigación, de mi crecimiento profesional en todo el semestre, por su total dedicación, comprensión y enorme colaboración

A los profesores de matemática Emma Cortez y Juan Aguirre, por su excelente formación en el campo de la enseñanza, por brindarme los mejores consejos, valores y actitudes de buen profesor de matemáticas

Y a mi casa de estudios, la UARM, por el gran plantel que conté en toda mi etapa universitaria, a los grandes maestros que me tocó compartir en mi pregrado

RESUMEN

La presente tesis tiene como objetivo propiciar la génesis instrumental del GeoGebra, específicamente propiciar la instrumentalización de la función exponencial a partir de una secuencia de aprendizaje mediada por el GeoGebra en estudiantes de 5to grado secundaria (15-16 años de edad). Debido a que el presente estudio está centrado en los procesos de instrumentalización se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo una secuencia de aprendizaje, mediada por el GeoGebra, favorece la instrumentalización de la función exponencial en los estudiantes de quinto grado de secundaria?

Para este estudio, se escogió como marco teórico central el Enfoque Instrumental de Rabardel. La investigación es de tipo cualitativa y como marco metodológico se trabajó los aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue. Este estudio es de tipo local ya que la investigación estuvo dentro de una micro ingeniería y se centra en el modelo de la Situación de la Actividad Instrumentada. Por último, como resultados de las acciones se observaron momentos de transformación de esquemas de uso y acomodación/transposición de esquemas nuevos o preexistentes. Finalmente, pudimos establecer que el nivel de instrumentalización alcanzado por los estudiantes fue el de estadio de personalización.

Palabras clave: función exponencial, proceso de instrumentalización, esquemas de uso, GeoGebra

ABSTRACT

This thesis aims to promote the instrumental genesis of GeoGebra, specifically to promote the processes of instrumentalization of the exponential function from a learning sequence mediated by GeoGebra in 5th grade students of the secondary level. Because our study is focused on instrumentalization processes, we ask ourselves the following research question: how does a learning sequence, mediated by GeoGebra, does it favor the instrumentalization of exponential function in fifth grade secondary school students?

For this study chosen as the central theoretical framework the Instrumental Approach of Rabardel. And as a methodological framework some aspects of the Didactic Engineering of Artigue are worked on. The study is of a local type since it was within a micro-engineering and we focused on the Instrumented Activity System model. Finally, as results of the actions, moments of transformation of usage schemes and accommodation/transposition of new or pre-existing schemes were observed. Finally, we were able to establish that the level of instrumentalization achieved by the students was the level of personalization.

Keywords: exponential function, instrumentation process, usage schemes, GeoGebra

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La presente investigación aborda el estudio del proceso de instrumentalización relacionados al aprendizaje de la función exponencial a partir del software matemático GeoGebra siguiendo una secuencia de aprendizaje de modo que contribuya a la enseñanza de las matemáticas en un ambiente dinámico. Esta contribución que se espera destacar considera el ambiente computacional dentro de un gran bagaje de recursos tecnológicos que pueden hacerse uso a nuevas metodologías y a mejores aprendizajes.

A continuación, se presenta la estructura del presente estudio:

En el primer capítulo, planteamiento y justificación, se presenta la problemática del estudio, algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de función exponencial, con el uso del GeoGebra en un tema dentro del álgebra lineal y otras con relación al marco teórico que se propone en este estudio. También se formula la importancia de dicho estudio, la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos trazados en la presente investigación.

En el segundo capítulo, se lleva a cabo un estudio epistemológico-histórico del objeto matemático función exponencial, además de un estudio cognitivo de dicho objeto matemático para concluir con la construcción del objeto matemático usando el software GeoGebra. La pertinencia de esta distribución se debe a la metodología utilizada que se detallará en el cuarto capítulo.

En el tercer capítulo, se describe la fundamentación teórica del estudio, aspectos centrales del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), específicamente en el proceso de instrumentalización dentro de la génesis instrumental.

Posterior a ello, en el cuarto capítulo, se aborda algunos aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) lo que permite que la investigación sea de tipo cualitativo experimental por las fases que dicha metodología establece. Además, esta es útil debido a que se confronta análisis a priori y a posteriori en cada actividad planteada de la secuencia de aprendizaje.

Finalmente, en el quinto capítulo que refiere al análisis de los instrumentos, se detalla a los sujetos participantes de la investigación, explicando aspectos metodológicos en la selección de los sujetos participantes, la descripción de la secuencia de aprendizaje y el procedimiento de su aplicación. A continuación, se analiza cada una de las actividades involucradas en la secuencia de aprendizaje a partir de micro ingeniería didáctica donde se considera el análisis a priori y a posteriori en las evidencias presentadas por los estudiantes de quinto grado de secundaria (15-16 años de edad) en una institución pública de Lima Metropolitana.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN

1.1. Presentación de la problemática

Actualmente, en nuestro país el estudio de las funciones y modelos exponenciales se encuentra programado por el Currículo Nacional para estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria. Asimismo, una capacidad de la competencia *Resuelve problemas de regularidad y cambio,* plantea que los estudiantes deben expresar el significado y crecimiento de la función exponencial, sus desplazamientos horizontales y verticales; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones al plantear y resolver problemas (Currículo Nacional, 2016, p. 153). Sin embargo, encontramos que, en la Evaluación PISA del 2015, "menos del 1% de los estudiantes logran desarrollar y trabajar con modelos de situaciones problemáticas complejas en las que seleccionan e integran diversas representaciones adecuadas" (p.82), el cual involucra directamente a la competencia mencionada. Dicho contexto, refleja un debilitamiento en el desarrollo de capacidades y competencias relacionadas al álgebra, con relación a contenidos que podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos. En este sentido, estudiantes que están a punto de egresar del nivel Secundaria presentan dificultades para alcanzar los aprendizajes esperados en el área de Matemática. En consecuencia, dichos estudiantes, no lograron desarrollar las capacidades o las competencias esperadas delimitados para dicha área curricular.

En conexión a lo dicho anteriormente, cabe reconocer que la formación por competencias es una estrategia, un modo de actuación de los estudiantes y maestros, del cual, según Huerta, Penadillo y Kaqui (2017) trabajan en conjunto con el propósito de buscar alcanzar la formación integral de las personas y el dominio de una serie de competencia que se traducen en un conjunto de desempeños que evidencian el dominio saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir. De todo ello, impulsa en primer lugar a que los docentes estén inmersos dentro de la sociedad de la información y del conocimiento (lo que hicieron posible muchas de las nuevas tecnologías existentes) y con ellas, el uso masivo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación, permitiendo de esta manera, la aparición de nuevas y mejores innovaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Como por ejemplo impartir una sesión que sea mediada por el GeoGebra como un recurso oportuno para el óptimo aprendizaje y enseñanza sobre un determinado objeto matemático. En consecuencia, cabe decir que los efectos del empleo de las TIC en el aula las asocian con la aparición de ambientes colaborativos en los aprendizajes, mejoras en la motivación o el interés, una mayor inclinación por la indagación, o el fortalecimiento de habilidades intelectuales como el razonamiento y la resolución de problemas (De la Chica, 2010).

Por ello, la función exponencial al pertenecer a la disciplina del álgebra, nos lleva a señalar las numerosas aplicaciones que ofrece en diferentes áreas del conocimiento, de manera general, cuando se enseñan las aplicaciones de las funciones lineal y cuadrática, en palabras de Hitt (2000, como se citó en Cupi, 2018), es que con ellas podemos modelar matemáticamente fenómenos de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. En el caso del objeto de investigación que viene dado por la función exponencial, podemos ver ejemplos cotidianos en Elstak (2007), como el crecimiento del dinero depositado a interés compuesto, el crecimiento de la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito y el avance de las epidemias en una población. Así como el actual caso de la pandemia del virus SARS-CoV-2 (denominado como COVID-19[1]), se observa el crecimiento exponencial de las personas infectadas por el virus en nuestro país y también a nivel mundial. Sin embargo, la comprensión del objeto matemático se vería obstaculizada si solo se dispone de esquemas mentales lineales, puesto que es muy recurrente que se asimilen los modelos no lineales a los lineales (Karrer y Magina, 2000). Esto se puede entender mejor en el trabajo doctoral presentado por Sureda, que nos menciona:

> "los esquemas mentales lineales de las personas son el producto de un largo proceso de construcción que se inicia con su propia participación en situaciones cotidianas que requieren ser modeladas mediante variaciones lineales, mientras que los esquemas no lineales, y en particular los exponenciales, son más complejos pues se apoyan parcialmente en las estructuras aditivas y multiplicativas". (2012, p. 18)

[1] Denominamos COVID-19 a la enfermedad causada por el SARS-CoV-2, el virus causante de la pandemia actual.

Por tal motivo, resulta necesario estudiar qué situaciones ayudan o no, a la conceptualización de las funciones exponenciales pensando en estudiantes que se encuentran a puertas de culminar la etapa escolar. Como vemos, esta influencia del Álgebra en otros campos de estudio ha obligado a que sea una de las materias presente en los programas de numerosos estudios universitarios en nuestro país, pero que lastimosamente aún los estudiantes universitarios presentan complicaciones en interiorizar dichos conocimientos matemáticos ya que requiere desarrollar un proceso cognitivo más complejo.

1.2. Antecedentes

Un estudio que muestra la relevancia de la enseñanza de las matemáticas haciendo recurso de las TIC, es el estudio realizado por **Chumpitaz (2013),** en su tesis titulada *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la Función definida por tramo mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. Dicha investigación tuvo como objetivo analizar las acciones de los estudiantes de los cursos de Análisis Matemático I de las carreras de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola, durante una secuencia de aprendizaje de la función definida por tramos mediada por el GeoGebra, que intentaba responder a ¿cómo una secuencia de aprendizaje puede minimizar las dificultades que se presentan a los estudiantes al instrumentalizar propiedades de la función definida por tramos en su aprendizaje con el GeoGebra? De las conclusiones obtenidas por el investigador se pudo rescatar lo siguiente: en primer lugar, algunos integrantes de los equipos de estudiantes movilizaban esquemas de uso preexistente en el manejo del software GeoGebra, posiblemente, durante su etapa escolar, ya que esos esquemas preexistentes estaban relacionados con arrastres que realizaban, el uso de zoom de acercamiento o alejamiento y el desplazamiento de la vista gráfica del GeoGebra. En segundo lugar, de acuerdo con su objeto de investigación, se observó que estos esquemas preexistentes están relacionados con actividades previas de aprendizaje de funciones, cuando los estudiantes identificaban el dominio, el rango y realizaban transformaciones de funciones. Y de acuerdo, al proceso de Génesis Instrumental, el investigador concluyó que el proceso de instrumentalización de ambos instrumentos (GeoGebra y función por tramos) fue local, es decir, lograron alcanzar el primer nivel de instrumentalización.

Un estudio similar es el estudio presentado por **García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2018)** titulado *Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto* *simbólico función exponencial*, se buscó analizar si las herramientas del software GeoGebra facilitaron la instrumentalización de la función exponencial en los estudiantes del primer semestre, de la carrera de administración de una universidad privada de Lima, matriculados en el curso de Matemática Básica. Para ello, su primera actividad se centró en la instrumentalización de la función exponencial, es decir, del enriquecimiento de las propiedades y características del artefacto simbólico (función exponencial), para luego, pasar a la instrumentación del artefacto con el desarrollo de una segunda actividad. En este sentido, los investigadores llevaron a cabo el análisis a priori y a posteriori de las dos actividades propuestas.

Considerando los resultados de uno de los estudiantes que participó en la parte experimental, se resalta algunas de las conclusiones de su investigación: El estudiante logró movilizar esquemas de acción instrumentada como "la base de la función exponencial no puede tomar el valor de uno", "la función exponencial es decreciente si su base toma los valores entre 0 y 1", "la función exponencial es creciente si su base tiene un valor mayor que uno" y "el parámetro b es una asíntota horizontal". Además, a partir de los esquemas de acción instrumentada, pudo generar nuevos esquemas de utilización para una determinada situación. Las actividades trabajadas, en las que se utilizó el software GeoGebra, favorecieron la transformación de artefacto a instrumento de la función exponencial. En otras palabras, la posibilidad de observar la representación gráfica de la función en este ambiente dinámico permitió validar los conocimientos previos de los estudiantes.

Años posteriores, otro estudio nacional realizado por **Martínez-Miraval y García-Cuéllar** (2020) en su investigación "*Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida*" tuvo como objetivo analizar cómo estudiantes de una universidad de Lima, Perú, aprenden el concepto de integral definida, mediado por GeoGebra, a partir del cálculo de medidas de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y el eje X en un intervalo dado. En su análisis, los autores consideraron en primer lugar el Enfoque Instrumental como marco teórico para el estudio del proceso de transformación del artefacto simbólico integral definida en instrumento. Luego de ello, los autores enfatizan algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para la identificación de las aprehensiones en el registro gráfico tal como nombra su estudio. Por otro lado, para su estudio se tomó aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue como metodología de investigación, la cual es de corte cualitativo experimental.

La ejecución de su investigación fue llevada a cabo de dos encuentros con seis estudiantes que cursaban Cálculo I de la carrera de Administración de una universidad privada de Lima. En el primer encuentro se desarrolló una primera actividad que se enfoca en el proceso de instrumentalización donde buscaba potenciar las propiedades y características del artefacto simbólico integral definida como el límite de una suma de términos. Esto, conllevó a que los estudiantes movilicen esquemas de uso, tales como medida del área de figuras geométricas, intervalos, funciones, y sumatorias. Mientras que, en el segundo encuentro, con una segunda actividad, buscaban observar el proceso de instrumentación del artefacto donde los valores de las integrales fueron hallados utilizando una calculadora científica. En esta actividad, se presentan evidencias de comprensión y utilización de la integral definida para el cálculo de áreas de regiones, por lo cual interpretan que los estudiantes han generado esquemas de uso y de acción instrumentada que permite ver a la integral como un instrumento para el cálculo de áreas. Para la realización de las actividades, cada estudiante contaba con fichas de trabajo, calculadora y su celular donde se instaló el software GeoGebra y un lector de código QR. Finalmente, entre algunas de las conclusiones consideradas en su estudio, se destaca que en las tareas que resuelven, se ponen en juego instrucciones de manera que estas deben llevar a la práctica de conocimientos previos y a la generación de conceptos nuevos posteriormente. De esta forma, con relación al Enfoque Instrumental se observó que un mismo esquema, puede tomar diferente estatus según la actividad dada, es decir, puede ser considerada como un esquema de uso para una actividad o esquema de acción instrumentada para otra actividad distinta. Además, en el análisis se observó que las acciones realizadas por los estudiantes posibilitaron observar los procesos de instrumentación e instrumentalización de la integral definida, lo que hizo posible afirmar que la integral definida pasó a ser para ellos un instrumento para el cálculo de medidas de áreas de regiones. Y, por último, los autores aseguran que el uso de applets diseñados en GeoGebra contribuyó a la interacción de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas.

También se considera estudios internacionales como es el caso de **Xavier Neto (2015)**, en su investigación “*Um estudo da genêsis instrumental para função de uma variável real com várias sentenças*” tuvo como objetivo explicar de qué manera el artefacto función de una variable real con varios tramos se convierte en instrumento para estudiantes que cursaban el segundo y tercer año de secundaria. De este modo, el autor intenta observar la generación de la génesis instrumental lo que lleva a identificar los esquemas que los sujetos ya poseen y que los movilizarán durante la resolución de las actividades propuestas, así como nuevos esquemas que puedan aparecer en interacción con los medios tecnológicos. Los referentes teóricos de la investigación fueron el Enfoque Instrumental de Rabardel y la teoría de los registros de representación semiótica con el fin de realizar un mejor análisis de la interacción del ambiente tecnológico con el conocimiento, teniendo como herramienta de análisis el proceso de Génesis Instrumental. Asimismo, como metodología, el autor usó algunos supuestos de la Ingeniería Didáctica de Artigue a partir de talleres dirigidos a estudiantes de 2do. y 3er los cuales fueron organizados entre sí, al azar, en parejas. y/o tríos. En total, quince estudiantes se inscribieron con el objetivo de participar de los talleres el cual fue distribuido en dos grupos donde trabajarían dos actividades. Los objetivos de la primera actividad consisten en el desarrollo de seis ejercicios adaptado de un libro de matemática que son detallados en el análisis a priori, mientras que la segunda actividad implicó un problema práctico de la vida cotidiana sobre la cuenta de luz, lo que involucraba desarrollar 10 ejercicios. Durante la acción de los alumnos, fue posible identificar que la conversión de la representación en el registro algebraico al registro gráfico de una figura geométrica favoreció que movilice un esquema relativo a la construcción de gráfico de una función. Asimismo, se encontró esquemas de usos en los estudiantes sobre intervalos y dominio de una función. Con relación el Enfoque Instrumental, se estableció que algunos estudiantes movilizaron esquemas de uso (ya existentes) de contenidos matemáticos que le ayudaron a encontrar soluciones para los ejercicios propuestos en la actividad. Esto ocurrió cuando movilizaron los esquemas de uso relativos a la noción de dominio restringido por el rango. Estos esquemas se convirtieron en esquemas de acción instrumentada, cuando se utilizaron en la acción para resolver los dos problemas de la primera actividad, aunque en ellas se hayan cometido ciertos errores de operación. Las principales conclusiones del estudio señalaron que es posible que los ejercicios hayan posibilitado la evolución de esquemas de uso y de acción instrumentada y, eventualmente, la aparición de la génesis instrumental. Si bien en dicha investigación y análisis no se remarca el uso de un software tecnológico por parte de los estudiantes durante la ejecución de las actividades, el autor entiende que en las conversiones y tratamientos hechas por ellos representan una actividad de instrumentalización ya que en muchas de las actividades tuvieron que recurrir a sus esquemas de usos prexistentes. Además, nuevos esquemas sobre los temas matemáticos abordados fueron movilizados y agregados al artefacto (función por tramos) bajo la forma de los esquemas de acción instrumentada.

Otro estudio internacional relacionado al marco teórico es el trabajo de maestría de **Galvis (2019)** en su tesis de maestría *"Euclidea propone y tú argumentas. Esquemas de argumentación y génesis instrumental"* tuvo como objetivo identificar el tipo de argumentos que generan los estudiantes de noveno grado en el software Euclidea y la aparición de la génesis instrumental en su uso. Como marcos referenciales, hace uso de la clasificación de los Esquemas de argumentación que propone Flores (2016) y los elementos que componen el Enfoque Instrumental de Rabardel el cual serán analizadas a partir de las aplicaciones que ofrece el software Euclidea. Al considerar un marco teórico que involucra la argumentación de los estudiantes, la autora elige su metodología desde un enfoque fenomenológico junto a una perspectiva interpretativa. Para ello, diseñó y aplicó una secuencia de actividades con regla y compás, y una entrevista basada en tareas con la aplicación Euclidea puesto que dicha aplicación tiene como objetivo realizar construcciones geométricas utilizando, inicialmente, rectas y circunferencia. En total, la autora seleccionó 17 tareas que involucran los siguientes objetos matemáticos: circunferencia, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y rectas perpendiculares. A partir del enfoque fenomenológico que involucra interpretar los actos o experiencias de los involucrados en el estudio cuando usan el recurso tecnológico digital, se observó que en los esquemas de argumentación no hubo alguna modificación, ya que los estudiantes validaban sus afirmaciones o sospechas por medio de los elementos geométricos que tenían a la mano. Por otro lado, la autora encontró que los estudiantes mostraron índices en los procesos de instrumentalización e instrumentación en el comando mediatriz de Euclidea, por lo que dicho comando pasó de ser un artefacto a ser un instrumento para las estudiantes, pues, así como ellas actuaron sobre el comando, este último les permitió desarrollar varias tareas por medio de nuevos esquemas encontrados. La instrumentalización del comando mediatriz se dio cuando las estudiantes identificaban y usaban varias de sus funciones, y, con respecto al proceso de instrumentación, se observa que a partir de dichas funciones las estudiantes generaron estrategias de construcción ayudándoles a desarrollar diferentes tareas.

Abramovich (2019) en su estudio titulado *Technology-immune/technology-enabled mathematical: Problem solving as instrumental génesis*, demuestra diversos usos de herramientas digitales mutuamente complementarias a través de la perspectiva de la resolución de problemas K-16 (representa problemas que reúne los diversos niveles de educación en los estudiantes pre-universitarios) con tecnología y compara esta perspectiva con el Enfoque Instrumental. Además, el autor trata de demostrar que, a pesar de todas las innovaciones tecnológicas disponibles para la enseñanza y el aprendizaje en el siglo XXI, la pedagogía de un aula de matemáticas todavía se puede en el ejercicio y la práctica usando recursos tecnológicos: Por ejemplo, la enseñanza del álgebra asistida por un ordenador, puede incluir el uso de ensayos y errores en la búsqueda de raíces de ecuaciones cuadráticas para ser aprobadas por un ordenador, factorizando polinomios, invirtiendo funciones, etc..

En este sentido, el autor describe la resolución de un problema matemático TITE (inmune a la tecnología y habilitada por la tecnología) y lo relaciona con la teoría instrumental, proponiendo que: Una resolución de problemas matemáticos TITE puede incluir el uso de múltiples artefactos (dispositivos digitales) en apoyo de una sola tarea. En el caso de que los dispositivos sean complementarios, tal uso de la tecnología puede considerarse a través de las lentes de doble estimulación para un sujeto al que se le asigna una tarea específica o extiende la asignación de una manera de descubrimiento computacional. Y también que una actividad de TE (o instrumentalización), para tener éxito, requiere el aumento de un componente de TI (o instrumentación avanzada). Por lo tanto, no solo se puede ver una actividad TITE compleja a través de los lentes de la génesis instrumental, sino, pedagógicamente, diversos softwares matemáticos de alta tecnología pueden requerir un nuevo plan de estudios matemático que permita la unidad del compromiso cognitivo y el uso de tecnología como elementos esenciales de la matemática en resolución de problemas. Este nuevo plan de estudios debe tener en cuenta las posibilidades positivas (desarrollo conceptual) y negativas (pulsar botones) de la tecnología informática.

1.3. Justificación del estudio

Para la presente investigación, se tiene claro que el objeto matemático es la función exponencial, en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes pertenecientes al quinto grado de secundaria. Como se mencionó anteriormente, los resultados del aprendizaje de la función exponencial no fueron para nada sobresalientes, esto se debió a la enseñanza de la misma se basa en metodologías tradicionales, de memorización de sus elementos y resolución de problemas, mayormente expositivas, dando lugar a un aprendizaje de contenidos, meramente repetitivos y nada significativo para los estudiantes. Particularmente, el contenido algebraico que se imparte en el área de Matemática se da durante el ciclo VI y VII del nivel EBR donde hace hincapié al estudio de ciertas funciones polinomiales en la resolución de problemas y modelado. Por el cual, la importancia de la presente investigación se enmarca en considerar las dificultades que presentan al conceptualizar las funciones exponenciales en los procesos de enseñanza aprendizaje con la finalidad de fortalecer las capacidades algebraicas (establecidas en el Currículo Nacional de la Educación Básica - CNEB) y mejorar la capacidad para comunicar claramente las ideas matemáticas de forma oral y escrita en los estudiantes.

De la misma manera, la enseñanza de los elementos de una función exponencial en el aula, nos dice que los estudiantes universitarios presenta dificultades para su apropiación y vinculación en diferentes contextos matemáticos, pues, respecto a las dificultades que enfrentan los alumnos, Greivin (2010, como se citó en Sureda, 2012) indica que existe un predominio del uso de modelos lineales al resolver problemas exponenciales, y que no se emplean correctamente las propiedades de las potencias por el poco conocimiento de las mismas; Angulo y Viscarra (2012) señalan que existen deficiencias al momento de graficar las funciones: al determinar los interceptos con los ejes coordenados, que no se interseque la gráfica con la asíntota horizontal, y finalmente, Velásquez (2014, como se citó en García, 2018) indica que el aprendizaje de la función exponencial no es fácil para los estudiantes y las dificultades observadas se relacionan con las diferentes representaciones, en particular la gráfica y la algebraica.

Por otra parte, darle un Enfoque Instrumental a dicha investigación abre un nuevo panorama para la enseñanza de las matemáticas en el nivel escolar (EBR) y superior. En cuanto al nivel escolar (EBR), muchas escuelas han introducido en su enseñanza el uso de proyectores, ecran de pared y diversos programas matemáticos (similares al GeoGebra) pueden llegar a comprender mejor el conocimiento matemático a partir de las diversas representaciones que puede ofrecer un objeto matemático durante su estudio, de manera que transforma significativamente a una enseñanza de las matemáticas estática, monótona y tradicional. Y con respecto al nivel superior, consideramos que es mayor el aprovechamiento de los recursos tecnológicos que cuentan las universidades y la variedad de programas informáticos en matemática. Pues, en las últimas décadas, con los avances de la tecnología ha sido posible incorporar nuevas herramientas virtuales, en el cual, la educación se ha beneficiado con nuevos recursos aplicables en el aula, siendo los más utilizado, los softwares de comprobación de resultado. De esta forma, la enseñanza del álgebra a nivel superior debe permitir un mayor desarrollo del conocimiento del entorno y, con ello, poder crear modelos mentales de abstracción sin necesidad de tener específicamente el entorno físico, solo con ingresar los datos a un ordenador puede obtener un cálculo aproximado sin necesidad de tener el contacto físico con el evento propuesto (como sucede hoy en día con el aumento de personas infectadas a causa del Coronavirus).

En consecuencia, es necesario buscar alternativas metodológicas que promuevan aprendizajes duraderos y significativos en el estudiante, que pueden ser comprobadas en diversas investigaciones que recomiendan el uso de las tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos (Chumpitaz, 2013), donde manifiestan revisar propuestas que consideren el papel de los artefactos en el aprendizaje. Es por ello, que la importancia del uso del software matemático GeoGebra se presenta importante en la investigación para la creación de una secuencia didáctica en la enseñanza de la función exponencial a partir de la Ingeniería Didáctica, ya que este software, de acuerdo con Hohenwarter (2012, como se citó en Chumpitaz, 2013), es usado sin mucha dificultad como software de geometría dinámica (DGS) y como un sistema de álgebra computacional (CAS), donde las funciones básicas del CAS se orientan a salvar algunas brechas entre la geometría, álgebra y cálculo. Además, Patiño (2021) destaca la importancia de la inclusión de una estrategia pedagógica, mediada por el GeoGebra, para consolidar el pensamiento geométrico y algebraico en los estudiantes, así como desarrollar la visualización, las múltiples representaciones y el hacer. Ante ello, un estudio con dicho enfoque puede ayudar en cambiar el panorama de cómo llevar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el Álgebra puesto que podría permitir que las próximas estrategias didácticas consideren el uso de las TIC en la resolución de problemas y en la planificación y ejecución de una clase, de tal forma que se pueda mejorar sus procesos de adquisición y desarrollo de competencias según el actual Currículo Nacional de la Educación Básica.

Finalmente, la realización de esta investigación encierra motivos personales de poder aplicar una nueva estrategia de enseñanza motivadora dentro del ámbito escolar, y al mismo tiempo, de alguna manera poder ofrecer a los docentes encargados del área, una nueva secuencia didáctica en la enseñanza de la función exponencial que conlleve a la reflexión de los profesores y la interrelación con los estudiantes, puesto que la formación de la idea y el concepto de función exponencial son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior ya que observamos un crecimiento progresivo de la importancia del álgebra ligado a los temas del análisis matemático utilizados en diversas áreas del quehacer humano. Por consiguiente, con el estudio se pretender comprobar nuevas experiencias dentro de la enseñanza de las Matemáticas que traiga consigo mejores resultados en el rendimiento académico, incentivando el ánimo de superación en el alumnado, permitiéndole una interiorización de conocimientos más eficaz y, sobre todo, formar escolares egresados más competentes. Y es que, al ser la motivación un componente esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje los docentes deben valorar e implementar la tecnología en las propuestas didácticas, ya que conlleva a la imaginación y éste a su vez es la base de toda actividad creadora (Vygotsky, 1986).

1.4. Formulación del problema

- ¿Cómo una secuencia de aprendizaje, mediada por el GeoGebra, favorece la instrumentalización de la noción de función exponencial en los estudiantes de quinto grado de secundaria de una escuela pública de Lima Metropolitana?

1.5. Objetivos

Objetivo General

- Analizar, a partir de una secuencia de aprendizaje mediada por el GeoGebra, los procesos de instrumentalización de la noción de la función exponencial en estudiantes de quinto grado del nivel Secundaria

Objetivos Específicos

- Describir el proceso instrumentalización de la función exponencial en estudiantes cuando resuelven una secuencia de aprendizaje mediada por GeoGebra
- Identificar las dificultades que se presentan en los estudiantes al instrumentalizar algunas propiedades del software GeoGebra en su aprendizaje de la función exponencial

CAPÍTULO II: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO DE FUNCIÓN EXPONENCIAL

Previo a nombrar los referentes y constructos teóricos que sustenta el desarrollo y análisis de la presente investigación, se presentan diversas dimensiones del objeto matemático función exponencial. En un comienzo, las dimensiones históricas y epistemológicas para conocer el concepto de función exponencial. Posterior a ello, se estudia su relevancia en los aspectos didácticos y en su enseñanza dentro del nivel secundario en el Currículo Nacional y en materiales didácticos que otorga el Estado peruano en la Educación Básica Regular. Todo ello con el fin de presentar al objeto matemático en estudio en dimensiones posibles y realizar contraste entre lo que define a la función exponencial con las Enseñanzas de las Matemáticas en el currículo peruano.

2.1. Estudio epistemológico-histórico del objeto matemático función exponencial

En este primer apartado se presentan aspectos históricos y epistemológicos de la función exponencial. Desde la dimensión histórica, se pretende esclarecer algunas especificidades en su construcción como objeto matemático y cómo esto ha llevado a diversas construcciones mentales en los individuos para llegar a comprenderlo. Y, en la dimensión epistemológica, Cordero y Miranda (2002, como se citó en Vargas, 2012) consideran que un primer análisis teórico debe descansar en la epistemología del concepto ya que enriquecerá a dicho conocimiento para identificar los procesos utilizados en los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto de función exponencial.

Como en otros objetos matemáticos, la evolución histórica de la función exponencial puede ser vista desde varios panoramas en tal sentido que su introducción hacia sus primeros estudios es comprendida desde diversos contenidos matemáticos. Para citar algunos ejemplos: la función exponencial desde la visión de Euler en 1748, quien lo define como la inversa de la función logarítmica; el origen de la función exponencial procedente del concepto de potencia y de progresiones geométricas o la función exponencial construida como la solución de una ecuación funcional a partir del aporte del gran matemático Cauchy. Sin considerar el nivel de complejidad de dichos temas, nos apoyamos en las investigaciones de Sureda (2012), Cupi (2018) y Arredondo (2020) con el objetivo de presentar los constructos históricos que demanda la función exponencial.

En esa línea, primero nos referiremos al desarrollo de la construcción de los objetos potencia y exponente, sobre los cuales existen evidencias de su notación exponencial desde Los elementos de Euclides en 1576 cuando establece la igualdad $a^{m+n} = a^m . a^n$ en enteros positivos dentro su libro IX en el que da a conocer la suma de los términos de una progresión geométrica. Seguidamente, previo a la llegada de la Edad Media, se puede mencionar dos aportes importantes. El primero de ellos es el trabajo de Arquímedes por establecer notaciones en potencias vinculadas con números considerables al cálculo astronómico (Cupi, 2018). Y el segundo, con aporte de Diofanto de Alejandría en su libro *Arithmetica*, plantea ciertas abreviaturas para referirse a las potencias de números. De esta forma, según Cupi (2018) a partir de la investigación de Kline (1999) menciona como fue transcendiendo el uso de exponentes con la incógnita x:

> "…se sospecha que la incógnita la llamó el número del problema y lo que es para nosotros x^2 , él lo representaba como $\triangle^Y$, donde a $\triangle$ lo llamó potencia, similarmente a x^3 lo representó como K^Y , x^4 con $\triangle^Y \triangle^Y$, x^5 con $\triangle^Y K^Y$, x^6 con $K^Y K$, y usa los nombres cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado, cuadradocubo y cubo-cubo respectivamente". (Kline, 1999)

Sin embargo, ya en la Edad Media, el matemático francés Nicolás Oresme, en su obra *Algoritmus proportionum*¸ desarrolla cálculos de potencias con exponentes con otros números reales: racionales y hasta exponente irracional. Con ello, Oresme señala que, si el exponente es racional, entonces la expresión también lo será, caso contrario, será irracional (Cupi, 2018). Con esto, Oresme vuelve a interpretar la regla $a^{m+n} = a^m . a^n$, estableciendo otras identidades como $(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} . b^{\frac{1}{m}}$ y $(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$, el cual hoy es considerada como una de las leyes de exponentes que se trabajan en la matemática pero que en dicha época no fueron entendidas. Un siglo después, con Nicolas Chuquet aparecen las nociones de exponentes cero y negativo en su obra *Triparty en la science des nombres*. El exponente cero que introduce, indica que se trata de una cantidad estricta que no posee incógnita. La interpretación sería la siguiente: $12.^0$ quiere decir 12, $12.^1$ indica $12x$ (número lineal) y 12^2 significa $12x^2$ (catalogado como numero superficial cuadrado. Pues, aun no se hablaba de un $x^0 = 1$ puesto que el cero seguía siendo visto como la ausencia de cantidad. En cuanto al exponente negativo, Wallis (1665) introduce el índice de $\frac{1}{x}$ como -1 y el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc. Ante ello, Vargas (2012, como se citó en Cupi, 2018) menciona que hubo la necesidad de homogenizar las operaciones entre monomios y la de ampliar los índices (actualmente llamados exponentes) naturales a índices fraccionarios y negativos. El paso a exponentes racionales fue anunciado por Miguel Stifel (durante el siglo XVI), y el paso a exponentes reales fue realizado por Napier (1614-1620) quien además introduce el número de e de forma muy mesurada. Sobre Stifel en relación a la función exponencial, Sureda (2012) menciona que la función exponencial estuvo conectada al cálculo del logaritmo como una vinculación entre una progresión geométrica y una aritmética, el cual, dicha asociación fue desenvuelta por el matemático con la aparición de una primera tabla respecto a las potencias de 2.

Tabla 1. Primera tabla de progresiones

Progresiones	**Valores en la progresión**									
Progresión aritmética	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Progresión geométrica	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Fuente: Adaptado de Cupi (2018)

Luego de la construcción de la función exponencial mediante el objeto potencia y su notación exponencial, los trabajos posteriores al siglo XVI se presenta a la función exponencial como un objeto matemático ligado a la inversa de la función logarítmica. Esto se da a partir de la Tabla 1, donde John Napier se interesó en el concepto geométrico-mecánico de los puntos en movimiento y las relaciones existentes entre las progresiones aritméticas y geométricas (Collette, 1986, p. 304) los cuales lo condujeron a la invención de la noción al concepto que hoy conocemos como logaritmo. Sin embargo, en un principio, no se consideraba el término de base en los logaritmos. Esto fue posible en los trabajos realizados de Henry Briggs, quien elaboró una primera tabla de logaritmos en base diez, concluyendo que el logaritmo de 1 debería ser 0 y el logaritmo de 10 debería ser 1. De esta forma, a modo apriorístico, surgieron las bases de algunos logaritmos y propiedades a cargo de William Oughtred:

$\log(a\ x\ b) = \log a + \log b$	$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$	$\log x^a = a \log x$

Para ese entonces, Euler hacía uso de una letra e, que se desconocía su significado, para representar la base de un sistema de logaritmos naturales. Además, aquella denotación tal vez vino sugerido de la palabra "exponencial", pero no existe alguna prueba de aquello. Asimismo, se explora un nuevo espacio relacionado al cálculo, el cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz durante el siglo XVIII por el cual podemos dar inicio a la definición del objeto función.

Tabla 2. Definición general de función

Autor	Definición de función
Johann Benoulli	"… una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes".
Leonhard Euler	"es una expresión analítica compuesta por algunas cantidades que dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas"
Peter Dirichlet	"y es una función de la variable x, definida en el intervalo a < x < b, si para todo valor de la variable x en ese intervalo está correspondido un valor definido de la variable y" (Zuñiga, 2009, como se citó en Cupi, 2018, p.57)

De acuerdo con Ribnikov (1987, como se citó en Cupi, 2018, p. 43), Euler escribió que todo el análisis infinitesimal gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones. En la publicación de su obra *Introduction in Analysin infinitorum*, Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de la función exponencial y la incluye dentro de las llamadas funciones trascendentes. Con ella, establece lo mencionado anteriormente "la función exponencial es la inversa de la función logarítmica", y demostró que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^2}{3.2.1} + \frac{x^2}{4.3.2.1} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

Para ese entonces, la curva logarítmica ya se relacionaba con progresiones aritméticas y geométricas. Además, en ese entonces, la función podría ser escrita como una serie de potencia mediante la serie de Taylor (presentado líneas arriba), así, la función exponencial $f(x) = e^x$ podría ser descrita de aquella forma. Adicional a ello, podemos relacionar el valor de e^x de otra forma de acuerdo al estudio de Euler usando el símbolo i (posteriormente representado para el número imaginario $\sqrt{-1}$) entendido como un número infinito:

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i, \text{ que se puede entender como } e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Luego de ello, de acuerdo con Boyer (2003, como se citó en Ramirez, 2019), se atribuye a Jean Brenoulli el cálculo exponencial ya que consideró curvas exponenciales simples $y = a^x, y = x^x$ y la teoría de las funciones exponenciales fue completada por él al hallar el límite que se designa con la letra e. Finalmente, ya establecido el tratamiento de los exponentes y logaritmos como variables, aparecieron ideas del matemático Cauchy, y junto a ello, el surgimiento de una etapa de formalismo a las funciones exponenciales. Según Morales (2011, como se citó en Arredondo, 2020) menciona que:

> "… Cauchy define también una característica de la función exponencial para la ecuación funcional mencionada, afirmando que "sea f una función con dominio en los reales no nula, continua en el punto cero que verifica que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para todos los reales x e y. Entonces existe un real α talque, $f(x) = e^{\alpha x}$, para todo real x." (p. 42)

Con todo esto, a partir del nacimiento del cálculo infinitesimal, las funciones exponencial y logarítmica comienzan a tener importancia desde un punto de vista teórico, al comenzar a ser estudiadas sus propiedades diferenciales. Sin embargo, es pertinente presentar las diversas notaciones matemáticas sobre la función exponencial en diversos libros de matemáticas con el fin de comprobar cuáles de dichas notaciones se resalta más y por ende, es estudiada.

Un primer libro que orienta dicho estudio es de Larson y Hostetle (2006) *Cálculo con geometría analítica*, el cual presenta a la función exponencial desde la definición de función exponencial natural de forma que:

“la función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ se llama **función exponencial natural** y se denota por $f^{-1}(x) = e^x$, esto es, $y = e^x$ si y solo si $x = \ln y$”. (p. 350)

Además, añade que:

Figura 1. Concepto de función exponencial

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural se puede resumir como sigue:

$$\ln(e^x) = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$ Relación inversa.

Fuente: Libro *Cálculo con geometría analítica* de Larson y Hostetle (2006)

Entonces, desde este campo de estudio podemos interpretar que dicha conexión entre el objeto matemático logaritmo y exponente está enmarcada debido a análisis matemático dentro del cálculo infinitesimal. De manera similar, dicha notación es planteado por Leithold desde finales de los años 80 complementando lo siguiente:

“la función exponencial **exp (x)** se lee como “el valor de la función exponencial en x” ya que el rango de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales y el dominio de la función exponencial es el conjunto d los números reales”. (Leithold, 1980, p. 415)

De esta forma, llega a establecer ciertas propiedades provenientes de la teoría de exponentes y la teoría de logaritmos, incluyendo en una de ellas la noción de límite.

Figura 2. Propiedades de la función exponencial

Propiedades de la función exponencial natural

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty \;\; \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$

Fuente: Libro *Cálculo con geometría analítica* de Larson y Hostetle (2006)

Con esta última idea, podemos encontrar el libro de Romero y Granados (1983) el cual presenta a la función exponencial en la forma $f(x) = a^x$ y que, a partir del valor de su dominio y rango, desarrolla límites para la izquierda y para la derecha de dicha función

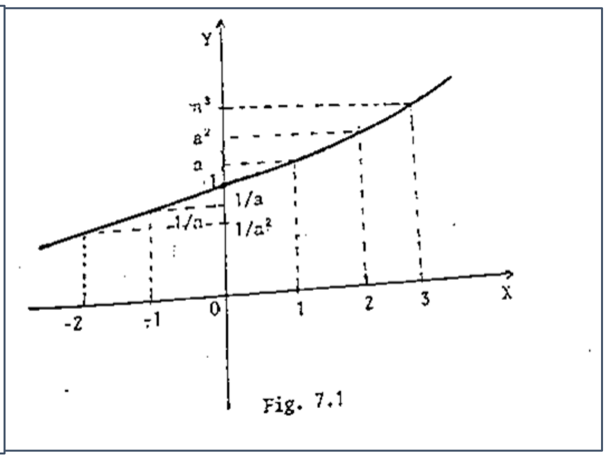
7.1. la función exponencial

7.1.1. Sea $a > 1$ fijo, la función $y = f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, tiene como dominio $\mathbb{R}$ y rango $[0, +\infty)$, es llamada la función exponencial de base "a". Tabulando datos:

x	0	1	2	3	→ +∞	-1	-2	-3	....→ -∞
y	1	a	a^2	a^3	→ +∞	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^3}$	....→ 0

$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Con estos datos podemos tener idea de la gráfica de esta función, $y = 0$, (el eje X) es una asíntota.



Fuente: Libro *Análisis matemático* de Romero y Granados (1983)

Se aprecia que $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$. Esta idea fue retomada desde la postura de Euler mediante la serie de Taylor, vista líneas arriba, donde se desarrolla mejor en los libros del matemático brasileño Elon Lage "Análisis Real", y el matemático polaco Antoni Stanislaw, "Analytic Functions – 2nd part".

Figura 4. Conceptos de función exponencial en el libro *Analytic Functions – 2nd part* (a) de Stanislaw (1952) y en el libro *Análisis Real* (b) de Lage (1997)

Formula (7.3) is obtained directly by substituting $z=0$ in (7.1). In order to obtain formula (7.4) let us note that, by Cauchy's theorem on the multiplication of series, we have

$$\exp a \cdot \exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

where

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!},$$

and therefore

$$\exp a \cdot \exp b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b).$$

(7.5) *The exponential function does not vanish at any point of the plane.*

Proof. Indeed, were $\exp a = 0$, then by (7.3) and (7.4) we should have $1 = \exp 0 = \exp a \cdot \exp(-a) = 0$.

From definition (7.1) it follows immediately that for real values of $x \geq 0$ the function $\exp x$ is a constantly increasing function, varying from 1 to $+\infty$ when x varies from 0 to $+\infty$. Making use of the equation $\exp(-x) = 1/\exp x$, which is a consequence of (7.3) and (7.4), we establish more generally that

(7.6) *The function* $\exp x$ *in the real domain is a positive and increasing function, and*

$$\exp x \to +\infty \quad \textit{for} \quad x \to +\infty,$$
$$\exp x \to 0 \quad \textit{for} \quad x \to -\infty.$$

Finally, we have from (7.4) and (7.1) for $h \neq 0$

$$\frac{\exp(z+h) - \exp z}{h} = \exp z \frac{\exp h - 1}{h} = \exp z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}, \quad (7.7)$$

(a)

Fuente: Libro *Analytic Functions – 2nd part* de Stanislaw (1952)

3. Función exponencial

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, es de clase C^{∞}. Derivando término a término vemos que $f'(x) = f(x)$. Como $f(0) = 1$, del Teorema 17, Capítulo 9, se concluye que $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

es la serie de Taylor de la función exponencial en el punto $x = 0$.

(b)

Fuente: Libro *Análisis Real de* Lage (1997)

2.2. Aspectos didácticos del objeto matemático función exponencial

En esta sección, se presenta una relación de cooperación entre la didáctica y la psicología en cuanto a la parte cognitiva que demanda en los estudiantes al estudio de la función exponencial. En la dimensión cognitiva, se da cuenta la conexión entre el aspecto formal de la matemática en el que se define la función exponencial (propiedades y características) con el reconocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en la aprehensión y significado del objeto y los objetos previos que pueden estar involucrado durante su enseñanza. Mientras que, en la dimensión de enseñanza, se da cuenta del estado de los procesos enseñanza y aprendizaje en cuanto a la organización del contenido en materiales didácticos propuestos en la EBR y por principales universidades

2.2.1. Dimensión cognitiva

La formación del estudiante siempre va en tránsito a procesos cognitivos más complejos y uno de los aprendizajes que refuerzan aquello, dentro de la disciplina de la matemática, se involucra con el objeto matemático funciones. En un comienzo, los hechos o proposiciones, aquello que forman parte del conocimiento conceptual de un objeto matemático, lleva a que los estudiantes sean capaces de establecer relaciones entre dicho conocimiento. Mientras que el conocimiento factual, según Cobo (1998), se caracteriza por ser un conocimiento de piezas aisladas de información, aquellas que no están relacionadas con otras ni tienen el apoyo de ninguna estructura conceptual. De esta forma, las conexiones significativas que se den entre ellos presuponen un tipo de dificultad donde emerge el conflicto entre *el objeto que el alumno debe aprender* con *lo que hace el alumno para aprender*, lo que conlleva a diversos procesos internos. Esto determina si solamente el estudiante adquirió datos o conceptos, a lo que Pozo (1992) llamaría a datos como un aprendizaje literal sin comprensión y, conceptos, un aprendizaje con significado. Por ejemplo, la expresión de una función exponencial 2^x puede ser almacenada en la memoria de un estudiante como un hecho aislado de información (un número elevado a una incógnita) – conocimiento factual – o, por el contrario, puede llegar a formar parte de una red de conexiones con otros conceptos: ley de exponente, gráfica en forma de curva, aumento infinitesimal, otras formas de función potencia, etc., cuyo caso formaría parte de un conocimiento conceptual.

Con esta primera idea, nos apoyamos a través de una revisión de investigaciones en educación matemática referente a las funciones exponenciales, para encontrar las construcciones mentales que los estudiantes desarrollan durante su aprendizaje formal del objeto matemático. Desde el estudio propuesto por Vargas (2012) podemos resumir los procesos mentales usados por los estudiantes al abordar las funciones exponenciales en distintos niveles de escolaridad:

Tabla 3. Procesos mentales en los estudiantes al momento de comprender las funciones exponenciales

Objeto matemático enfocado al aprendizaje de función exponencial	Resultados esperados en la construcción mental de los estudiantes
Estudio de las leyes de exponentes	De acuerdo con los estudios de Díaz (2006), Elstak (2007) y Martínez (2003) se espera que los estudiantes reconozcan y comunique el significado en la relación entre los exponentes positivos y negativos, considerando cuando tengan el valor de 1 y 0. De igual forma, Elstak (2007) espera que los estudiantes del nivel superior hayan dominado el concepto de exponentes de modo que puedan expresar con facilidad una idea general del contenido. Adicionalmente, Diaz (2006) expone que los estudiantes están en la capacidad de declarar argumentos formales de una potencia con base positiva y exponente irracional $(8^{2/3}, (2^3)^{3/4})$
Estudio del concepto de función	En este sentido, se espera que los estudiantes vean la gráfica de una función como un acercamiento dinámico a ella, pero que también observen el comportamiento de los cambios, puesto que en ellas puede esconder la *covariación*. Por ejemplo, el aumento o disminución de infectados por el Covid-19 con respecto a los días transcurridos interpretado en una función exponencial.

Estudio de la función logarítmica	En tal sentido, se espera que "los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados" (Grueso, 2019, p. 56) Además, desde el estudio de Hernández y Arrieta (2005) se espera que los estudiantes modelen un fenómeno físico a partir de una función exponencial Desde la perspectiva de Escobar (2012), se espera que los estudiantes comprendan el objeto función exponencial conectada con la función logarítmica a partir de la definición $f(x) = \log_a x$ es inversa de la función exponencial $g(x) = a^x$. Además, se espera que realicen una generalización de a^x argumentando anticipadamente los valores en su dominio y rango.

Fuente: Adaptado de Vargas (2012)

Con lo mencionado, podemos hacer conexión a algunas dificultades, errores o ausencias comunes en la construcción mentales a partir de los objetos matemáticos mencionados en la Tabla Nº 4.

Tabla 4. Dificultades cognitivas encontradas en los estudiantes en el estudio de la función exponencial

Objeto matemático enfocado al aprendizaje de función exponencial	**Dificultades, errores o ausencias en el estudio de dicho objeto**
Estudio de las leyes de exponentes	• Dificultades en establecer vínculos sobre las *definiciones de exponentes*[2] cuando estos son naturales, enteros, racionales, cero, uno, etc.

[2] El exponente es representado como el número de factores que será multiplicada la base por si misma.

Estudio del concepto de función como covariación	• Dificultad en comunicar y razonar la noción de exponentes negativos o racionales. Solamente se limitan a exponer la construcción de un exponente negativo por convención. • Ausencia en la práctica por definir los diversos exponentes caso por caso, lo que hace que la conexión en ellas no sea explorada • Desde el estudio de Martínez (2002, como se citó en Vargas, 2012) existe la persistencia de operaciones simples (recurrir a suma, resta, multiplicación o división entre la base y el exponente); persistencia del modelo de multiplicación reiterada; el cero como representación de la nada; deslizamiento de la memoria (aquellas respuestas que son ocasionadas por recordar equivocadamente las convenciones relativas a los exponentes no negativos)[3]. • Dificultad en asociar e insertar apropiadamente valores entre las preimágenes e imágenes de una función. Con ello, aumenta el déficit en la construcción del dominio y la del rango de la función y la relación entre ambos. Por ende, Lage y Trigueros (2006) menciona que los estudiantes tendrán problemas en inferir e identificar para qué valores la función no está definida, es decir, cuándo aquel valor no se puede sustituir en la expresión porque cuenta con una restricción y

[3] En contraposición a las dificultades presentadas, de ser revertidas, los estudiantes podrían:

- Argumentar por qué no se puede resolver usando exponentes solamente positivos o negativos en la solución de la ecuación $0.3^{x} = 27$
- Identificar que la división y la multiplicación están interconectadas en la función exponencial y por qué el factor de multiplicación se vuelve crucial para el estudio de crecimiento o decrecimiento en situaciones exponenciales diarias
- Responder positivamente actividades que susciten el uso de tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representaciones semióticas.

	dicho punto sobre el gráfico no correspondería a una correcta gráfica de la función.
Estudio de la función logarítmica	• Además de ello, se ha identificado que los estudiantes, cuando tratan contenidos matemáticos donde tienen que movilizar nociones algebraicas y geométricas, presentan dificultades en el tránsito de una expresión matemática a otra. Lo cual se esclarece mejor desde la Teoría de los Registros de Representación Semióticas propuesta por Duval, lo cual, ha llevado diversas investigaciones desde la Enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo, en el estudio de Advincula (2010), se encontró que unas dificultades encontradas tienen que ver con la falta de elementos geométricos y visuales en las actividades matemáticas, las cuales constituyen una dificultad para transitar por los diferentes registros.[4] • De la investigación de Weber (2002, como se citó en Vargas, 2012) se halló que la mayoría de los estudiantes entiende la exponenciación sólo como una acción, sin llegar a una comprensión proceso de relacionar con contenidos matemáticos posteriores. • Posterior a ello, se identificó que los estudiantes encuentran dificultad en argumentar porqué una

[4] Desde el objeto matemático función se puede mencionar lo siguiente:

- Desde lo algebraico, los estudiantes deben identificar el rango de una función $f(x)$ usando la regla de correspondencia (considerando sus restricciones de ser el caso) a cada punto del dominio. Con ello, deberán interiorizar esas acciones en un proceso para poder construir todo el conjunto de valores que constituyen ese rango
- Desde el punto gráfico o geométrico, en primer lugar, se traduciría en distinguir individualmente que puntos corresponde para cada valor del dominio y, posteriormente, interiorizar todo el conjunto de valores que corresponde a la proyección de la curva sobre el eje y.

función exponencial $f(x) = a^x$ es decreciente o creciente

- Alvarez (2017) y De Faria (2006) menciona que los estudiantes presentan dificultades para identificar la relación de la función exponencial con la función logarítmica. Para dar un ejemplo genérico, no identifican la idea de *que b a la x es el producto de x factores de b*, está relacionada con la noción de que *el logaritmo en base b de m es el número de factores de b que están en el número m*.
- Usar estrategias donde note claramente las asíntotas, intersecciones con los ejes coordenados y, por último, comunicar y argumentar resultados con lenguaje algebraico.

A continuación, se muestra algunos de los errores específicos más frecuentes en torno al objeto matemático exponente:

Figura 5. Errores específicos más frecuentes en exponentes

- *«Algunos estudiantes afirman que a)* $2^0 = 0$; *b)* $2^0 = 2$; *c)* $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$ *y d)* $2^{-3} = -8$ *ya que* $2^3 = 8$ *y se le coloca el signo.*
- *Ausencia de argumentos para establecer que:* $2^0 = 1$; $2^{-3} = (1/2)^3$; $2^{1/2} = \sqrt{2}$.
- *Respuestas reiteradas como: a)* $2^{-3} = 0.002$; *b)* $2^{-\frac{3}{2}} = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$
- *Si x no es entero,* 2^x *es solamente una notación (*$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, *etc.).*
- *Algunos estudiantes afirmaron que: A)* 2^1 *=2*2 ya que el dos se multiplica una vez, y B)* $2^1 = 2$ *ya que 2*1=2.»*

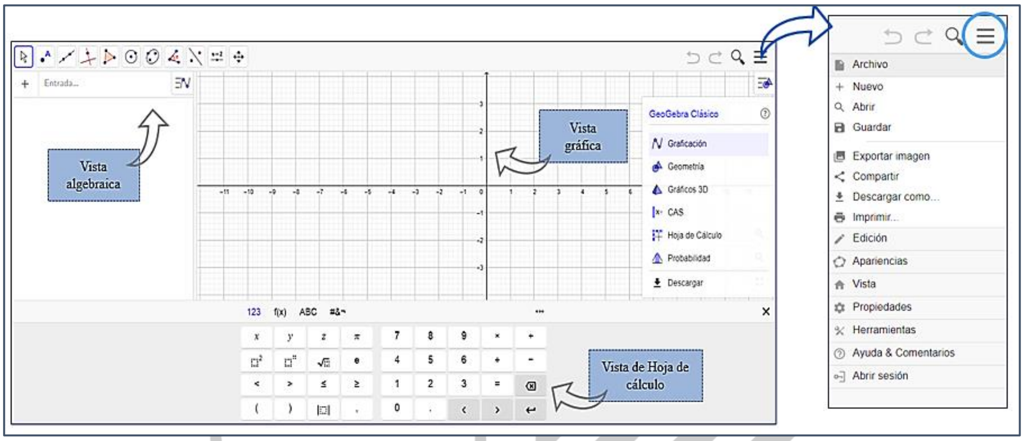
Fuente: Martínez (2000, como se citó en Vargas, 2012)

2.3 Construcción de la gráfica una función exponencial con GeoGebra

A continuación, mostramos la construcción de la función exponencial f en el software GeoGebra a partir de los siguientes comandos en la ventana de trabajo

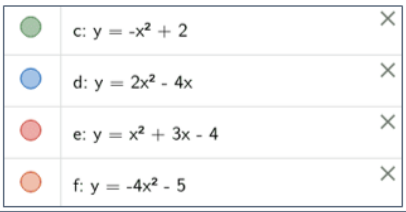
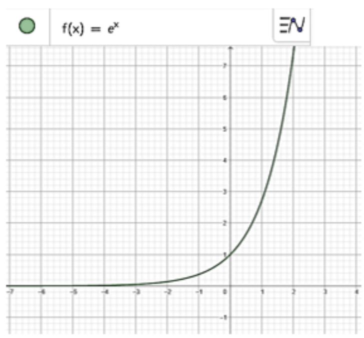
1. Se debe reconocer las diferentes vistas que ofrece el software en su interfaz inicial: una numérica, Vista algebraica, una geométrica, Vista Gráfica, y además, una Vista de Hoja de Cálculo. Esta presentación se encuentra dentro de su configuración habitual. Sin embargo, puede ser personalizada en la opción (≡) Barra de menú ubicada en el margen superior derecho de la ventana.

Figura 6. Vistas del GeoGebra



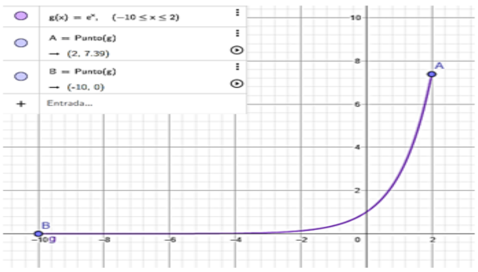
2. En la sección de la vista algebraica se utilizará el comando $f(x)$ o $y =$ junto al comando $exp(x)$ para expresar la función exponencial natural, tal como se aprecia en la Tabla 5.

Tabla 5. Graficando una función exponencial en su forma natural con el comando $exp(x)$

Usando el comando $f(x)$ estamos denotando la opción de la gráfica de una función, lo que permite establecer cualquier función que queramos	
Un primer acercamiento a la función exponencial, podemos hacer a través del comando $exp(x)$, es decir, escribir $f(x) = exp(x)$. Inmediatamente, el software reconocerá la función $f(x) = e^x$, la función exponencial en su forma natural	

3. De manera similar, considerando el manual del GeoGebra, la gráfica de cualquier función puede ser construida por el comanda **Función.** Podemos aprovechar este comando para delimitar el dominio de nuestra función, es decir, para determinar los valores de x el cual quiero que se aprecia, tal como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. Graficando una función exponencial en su forma natural con el comando *Función*

Escribiendo la palabra **función**, aparecerá tres formas de realizar la gráfica.	
De la gráfica anterior $f(x) = exp(x)$, podemos delimitar dicha función en dos puntos extremos (puntos A y B) para poder realizar un análisis mas seccionado de la gráfica. Para ello, se uso el comando **Función(<Función>,<Valor inicial, <Valor final>)** determinando los extremos de x = -10 hasta x = 2.	

Así como dicha gráfica presentada, observamos que dicho comando permite personalizar la gráfica de acuerdo a lo que se quiere analizar el comportamiento de la función

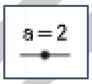
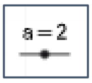
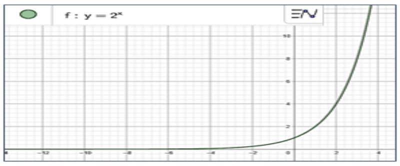
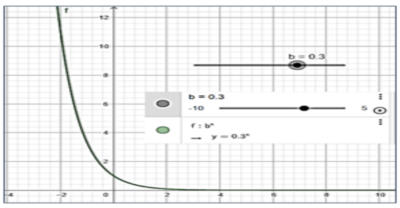
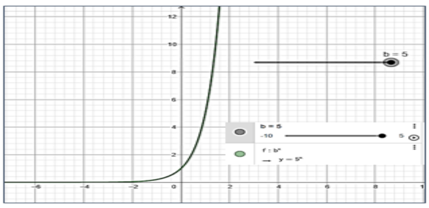
4. Por último, también podemos observar el comportamiento de una función exponencial usando la opción **deslizador**  tal como se aprecia en la Tabla 7.

Tabla 7. Graficando diversas funciones exponenciales usando deslizador 

Considerando la función exponencial $f(x) = 2^x$, proveniente de su notación $f(x) = b^x$, podemos observar el comportamiento de la gráfica al variar el valor de **b**, usando la opción **deslizador.**		
Con la característica establecida en el deslizador podemos apreciar las diferencias en el comportamiento de las gráficas. Por ejemplo, ver el comportamiento de $f(x) = 0.3^x$ o $f(x) = 5^x$		

A continuación, se presenta el capítulo III referente al marco teórico que sustenta esta investigación. Se abarcará la teoría de los instrumentos psicológicos de Vygotsky, que permite entender algunos conceptos y construcciones propuestos en el enfoque matemático a estudiar. Inmediatamente, se detallará el Enfoque Instrumental de Rabardel como soporte teórico en la introducción y aplicación de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las Matemáticas.

CAPÍTULO III: LA ACTIVIDAD INSTRUMENTADA DE LAS MATEMÁTICAS

Desde el inicio del siglo XX, las investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas se han enriquecido debido a los diversos enfoques que podemos encontrar en ella. Para mencionar algunas, las investigaciones y estudios citados recogen apartados conectados con la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la Teoría de la Situaciones Didácticas de Brosseau y el propio Enfoque Instrumental de Rabardel. Fundamentalmente, sobre este último enfoque, el presente apartado busca centrar las principales discusiones y desarrollo de las ideas de la actividad instrumentada para comprender la complejidad de la integración de la tecnología en la Educación Matemática.

En un primer apartado, se hará mención la perspectiva sociocultural de Vygotsky, como antecesora al enfoque matemático que se presenta, a partir de su Teoría de los Instrumentos Psicológicos. En ella, se rescata las nociones de la actividad práctica e instrumental con nuevas herramientas de aprendizajes, por el cual, el aprendiz llega a adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo, a través de unos instrumentos psicológicos. Dicho proceso, es conocido como la mediación instrumental. Por ejemplo, en el contexto de las matemáticas, los instrumentos utilizados en la actividad matemática determinan el modo en el que se desarrolla la tarea y la forma en la que el estudiante da un significado personal a tales objetos y procesos. Para ello, es necesario definir las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que participan los estudiantes en sus prácticas emergentes con el uso de una herramienta digital en la comprensión del objeto y en la resolución de problemas.

Posteriormente, en el segundo apartado, se desarrolla el Enfoque Instrumental propuesto por Rabardel y Verilon (1995), dicha teoría ha permitido el estudio de las actividades de los estudiantes en entornos CAS (Computer Algebra System) (Drijvers, 2003; Guin & Trouche, 1999) y entornos de geometría dinámica, lo cual, se centra la presenta investigación. De manera concreta, la teoría puede entenderse como tres dialécticas (Drijvers, 2013) que, en su conjunto, median en las actividades del estudiante para realizar una tarea. Una primera y central dualidad es la distinción entre artefacto e instrumento; la segunda, centrada en los procesos de instrumentación e instrumentalización; y la tercera, el desarrollo de esquemas-técnicas que desarrollan los participantes en el uso de los artefactos. En este sentido, el aprendizaje es impulsado por la necesidad de actividad, de técnicas de uso de artefactos y de esquemas cognitivos que integran un conocimiento pragmático y epistémico. Así pues, para articular un discurso que ayude a aclarar los objetivos de la investigación, el Enfoque Instrumental se presenta como un marco teórico que permite, por un lado, el análisis de los comportamientos de los estudiantes ante tareas algebraicas asistidas por instrumentos informáticos (en este caso el software GeoGebra). Y, por otro lado, el diseño de una Ingeniería Didáctica, como metodología, para validar el diseño de una secuencia didáctica y visualizar los procesos de aprendizaje de la función exponencial en dicha secuencia, del cual es presentado con mayor detalle en el Capítulo 2).

Finalmente, para concretar todos los constructos especificados en el Enfoque Instrumental, el tercer apartado se centrará en esbozar un marco conceptual en relación con el software GeoGebra y la función exponencial. Desde el punto de vista del Enfoque Instrumental, el GeoGebra constituye un artefacto, por el cual, como el manejo de todo artefacto, este requiere de una instrucción previa para convertirse en un instrumento para la realización de una determinada tarea matemática. En particular, GeoGebra permite integrar contenidos algebraicos, de interpretación funcional y representación gráfica en la comprensión del objeto matemático función exponencial. Sin embargo, cabe resaltar que la elección del artefacto y la instrucción en su manejo debe ser visto e integrado como un soporte más en las distintas configuraciones geométricas, funcionales y algebraicas, para evitar un posible efecto de deslizamiento metacognitivo, en el sentido de la Teoría de Situaciones Didácticas en Educación Matemática propuesto por Brosseau.

3.1. Teoría de los instrumentos psicológicos

Hoy en día, conocemos muchas teorías que abordan el tema del aprendizaje y cómo este es adquirido por el ser humano a partir de nuevos conocimientos y esquemas mentales en el transcurso de su vida. Sin embargo, muchas de estas teorías como el constructivismo, conductismo; o las teorías educativas referidas a la matemática tales como la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud o la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, no han podido determinar y analizar por su cuenta el impacto que le podemos adjudicar a la tecnología sí los estudiantes aprendieron, de tal forma, que nos permita justificar si la tecnología marca una diferencia importante durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Dentro de este marco, del papel de las herramientas informáticas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, encontramos los estudios realizados por Vygotsky, del cual, desarrolló su teoría de los instrumentos psicológicos que explica mejor como la actividad humana requiere una serie de factores intermediarios, como son los instrumentos psicológicos (o simbólicos) y los medios de comunicación interpersonal (Kozulin, 1994, como se citó en Ballestero, 2007). Para Vygotsky (2000), “los instrumentos psicológicos son creaciones artificiales, dispositivos sociales que modifican la evolución y la estructura de las funciones psíquicas, y sus propiedades, determinan la configuración del nuevo acto instrumental de manera que logre influir en el pensamiento” (p. 65).

3.1.1 El pensamiento de Vygotsky en torno a los instrumentos

Para entender esta idea, partamos del legado dejado por Vygotsky, su teoría sociocultural y lo que caracteriza en su pensamiento: la semiótica (el rol que cumple el lenguaje), la génesis social de la conciencia y el papel del instrumento simbólico como regulador de la actividad cognoscitiva (Medina, 2007, como se citó en Ledesma, 2014). En consecuencia, se crean instrumentos que, sin tener consecuencias biológicas, amplifican las capacidades naturales de las personas, del cual, diferencia cognitivamente uno con otro y con las especies animales, en la confluencia de dos aspectos diferentes: la maduración orgánica y la historia cultural. En este sentido, Lev Vygotsky propuso que los procesos mentales superiores se consideran acciones de la actividad mediada, logrando establecer en su teoría, tres clases de mediadores:

1. **Los instrumentos materiales o herramientas:** cual sea que sea manipulable por el humano, solamente tiene una influencia indirecta sobre los procesos psicológicos

humanos. Su utilización presupone, un empleo en equipo, un uso de comunicación interpersonal y una representación simbólica

2. **Los instrumentos psicológicos:** a diferencia del primero, estos instrumentos media entre los procesos psicológicos de los seres humanos
3. **Mediación de otros seres humanos:** Podemos verlo desde dos enfoques. Un primer enfoque, a partir de su idea central del cual el pensamiento y el lenguaje sirven para la construcción del conocimiento, establece que todas las funciones psicológicas superiores aparecen dos veces en el curso del desarrollo del niño: La primera, durante las actividades colectivas, en las actividades sociales, o sea, como funciones interpsíquicas; la segunda, en las actividades individuales, como propiedades internas del pensamiento del niño, o sea, como funciones intrapsíquicas (Vygotsky, 1983, como se citó en Guitar, 2011). Otro enfoque, pero menos desarrollado, centra el papel de otra persona como mediadora de significados.

3.1.2 Importancia y diferencia de los instrumentos

Ahora bien, resulta necesario diferenciar los términos entre un instrumento psicológico y un instrumento material que radica principalmente en los procesos que en los diferentes casos se pretende controlar. Como nos menciona Kozulin, uno de sus seguidores cercanos de Vygotsky:

> Tanto los instrumentos materiales como los instrumentos psicológicos, por su naturaleza, los dos son sociales. Sin embargo, mientras que los instrumentos materiales se dirigen a controlar procesos de la naturaleza, los instrumentos psicológicos dominan los procesos cognitivos y conductuales naturales del individuo. A diferencia de los instrumentos materiales, que sirven como conductores de la actividad humana orientada a objetos externos, los instrumentos psicológicos se orientan hacia el interior y transforman los procesos psicológicos naturales internos en funciones mentales superiores. (Kozulin, 2000, p. 29, como se citó en Ballestero, 2007).

En este sentido, todo instrumento siempre tendrá un fin por el cual es desarrollado y presentado a los aprendices, donde tal instrumento se desempeñará como instrumento material en lo que concierne que sea utilizado por un individuo para controlar los procesos naturales asociados al instrumento (considerando sus propiedades y características propias), pero, si este mismo instrumento apoya a controlar tales procesos internos de la mente como las funciones psicológicas superiores, entonces el instrumento elegido ya no será material, sino psicológico. Por ello mismo, en un inicio “la inclusión del instrumento en el proceso de comportamiento provoca en primer lugar la actividad de toda una serie de funciones nuevas relacionada con la utilización del mencionado instrumento y de su manejo” (Vygotsky, 2000, p. 67), y posteriormente, dicha actividad mental está mediada por el empleo de instrumentos psicológicos, es decir, los símbolos, que hacen posible el pensar” (Medina, 2007, como se citó en Ledesma, 2014, p.42). En consecuencia, el instrumento material se puede determinar desde el instrumento en sí mismo, pero, el instrumento psicológico se determina desde el individuo hacia el instrumento, lo que hace que hoy en día la necesidad de tener una teoría educativa que enfatice el uso de tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el Enfoque Instrumental plasmada por Verilon y Rabardel (1995)[5] se presenta como una buena propuesta a ello, puesto que retomaron la teoría de los instrumentos psicológicos de Vygotsky como la base que soportaría la construcción de dicha teoría en la enseñanza de las Matemáticas.

3.1.3 Instrumentos y funcionamiento de la zona de desarrollo próximo

Finalmente, con dicha teoría propuesta por Vygotsky, se observa que la utilización competente de instrumentos abre muchas motivaciones para llevar a cabo el trabajo en los aprendices, junto a las interacciones sociales (provocadas en un entorno de aprendizaje) y el desarrollo cognitivo que pueden adquirir los estudiantes, es un avance que los educadores desempeñan como una de las mejores opciones para llegar a la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) en la educación. Lo dicho se puede resumir en la siguiente *Tabla 5*, por ejemplo: cuando un mediador está trabajando con material concreto, está utilizando herramientas, mientras lo va explicando, está dialogando por medio de su lenguaje y utilizando los signos.

Tabla 8. Actividad mediada por instrumentos desde la teoría de Vygotsky

APRENDIZ		**ACTIVIDAD MEDIADA CULTURALMENTE POR SIGNOS**	**MUNDO**
Desde el instrumento en sí mismo	**Desde el individuo hacia el instrumento**		

[5] Hay que mencionar que la Dra. Michele Artigue con ayuda de Pierre Rabardel introdujo dicho enfoque a la Didáctica de la Matemática

Instrumentos materiales	"Instrumentos Psicológicos" (*sistemas para contar, las técnicas mnemónicas, los sistemas de símbolos algebraicos, los esquemas, los diagramas, los mapas*)	Lenguaje *(Activa y regula el comportamiento, primero desde fuera – el plano intrapsíquico – y más tarde desde dentro, en el plano intrapsíquico)*	"Procesos Psicológicos Superiores"
De lo social **Mediación Instrumental**			**A lo personal**

La actividad cerebral está siempre mediada por instrumentos y signos

"El propósito de trabajar con una ZDP, no es que el estudiante logre copiar o asimilar un repertorio cultural y escolar específico, sino crear una situación que facilite el aprendizaje" (Medina, 2007, como se citó en Ledesma, 2014. P.66)

Fuente: – Elaboración adaptada de Guitar, M. (2011)

3.2 Enfoque instrumental de Rabardel

El Enfoque Instrumental propuesta por Rabardel y Verilon (1995), atribuye un papel importante a los artefactos/herramientas que median en las actividades para realizar una tarea. Como vimos anteriormente, los desarrollos sobre conceptualizaciones y marco teóricos que permiten explorar la cuestión de la mediación por el artefacto se han producido dentro de enfoques basados en teorías de la actividad de Vygotsky, puesto que considera la mediación como el factor central que transforma las funciones psicológicas:

> "el uso de medios artificiales, la transición a la actividad mediada cambia fundamentalmente todas las operaciones psicológicas, tanto así como el uso de herramientas amplía ilimitadamente la gama de actividades dentro de las cuales las nuevas funciones psicológicas pueden operar". (Vigotsky, 200, 92)

En dicho enfoque, el desarrollo del aprendizaje es impulsado por la necesidad de una actividad, de técnicas de uso de artefactos y de esquemas cognitivos que integran tanto conocimiento pragmático, heurístico y epistémico. Todo ello está impulsado por los actos intencionales del sujeto y que se dirige hacia un resultado, al desarrollo de la génesis instrumental. Dicho concepto, adopta la idea de cómo los sujetos perciben los valores funcionales de los artefactos y los convierten en instrumentos, donde la elección y el manejo de un instrumento de resolución modifica el esquema de acción de los sujetos.

3.2.1 Mediación con el modelo situaciones de actividad instrumentada

El discurso del Enfoque Instrumental se centra en la mediación con el modelo situaciones de actividad instrumentada donde se relaciona el sujeto y la herramienta con el objeto, concibiéndose de esa forma una triada sujeto-instrumento-objeto. Esta relación parte desde un aumento significativo de investigaciones en torno al aprendizaje de la matemática en ambiente CAS (Sistemas de álgebra por computadora)[6] a finales de los 90 (Artigue, 2002), donde el trabajo con las herramientas computacionales logra transformarse en instrumentos matemáticos para abordar una nueva actividad matemática que genere una mejor reorganización del conocimiento de los estudiantes. Con esta concepción, según Ritella y Hakkarainen (2016) se puede entender que "las ideas de Rabardel son complementarias a la noción de Vygotsky que permite explicar la mediación en términos de inclusión y uso de artefactos en los procesos de resolución de problemas, pensamiento e investigación" (p.2). De la misma forma, múltiples investigaciones dentro de la Didáctica de las Matemáticas como la de LaGrange, Artigue y Trouche (2005, como se citó en Santacruz, 2009), resaltan que:

> el uso de tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como recursos que resuelven y solucionan problemas en el aprendizaje. (p.1)

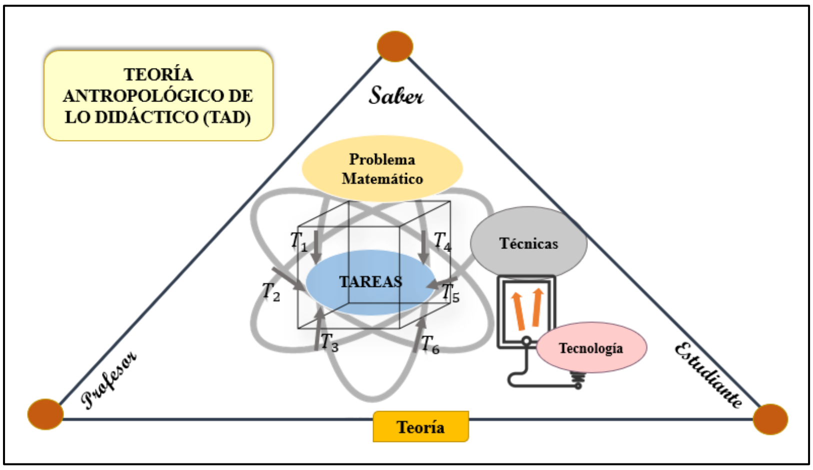
Para comprender la conexión, podemos mencionar que a partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (TAD) se inicia la aproximación instrumental de Artigue (2002) que con conocimiento de praxeologías llamó a Rabardel y colaboradores a dicho proyecto del uso de las calculadoras CAS. Posterior a ello, el proyecto avanzó de manera que el Enfoque Instrumental se sitúé dentro de la ergonomía cognitiva y fue planteado por Rabardel (1995), logrando así que Artigue lleve dicho

[6] La traducción alude al desarrollo de las matemáticas a partir de la creación y difusión del material y herramientas simbólicas relacionadas directamente al cálculo matemático puesto que los avances computacionales fueron desarrollándose en software matemáticos

enfoque a la Didáctica de la Matemática. Desde lo antropológico y sociocultural, el término de instrumentos en la actividad matemática ya era utilizado en referencia a los objetos matemáticos que este proponía (objetos ostensivos y no ostensivos) emergidas en las practicas o "praxeologías" de diversas instituciones. El conocer o entender un objeto matemático, desde una institución, partía de identificar y poner en prueba las praxeologías. Estas praxeologías cuentan con un componente práctico, delimitado por las tareas y las técnicas; y teórico, por las tecnologías y las teorías, los cuales siguen dicha secuencia:

Para resolver las tareas problemáticas programadas se necesitan de técnicas $(T_1, T_2, ..)$ ya que son consideradas como los modos de realizar o resolver la tarea. Estas técnicas que se apresten a la resolución de las tareas, mientras más amplias y/o complejas sean estas, se necesitará de tecnologías nuevas. Estas tecnologías darán lugar a técnicas nuevas, actualizadas o reforzadas capaces de resolver problemas nuevos. Por lo general, las técnicas tienen su origen en la institución pues esta representa la forma de hacer correcto, comprensible y justificada la tarea, por lo que, la tecnología se presenta como un discurso interpretativo y justificativo a la técnica. Es decir, la tecnología tiene la función importante de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y posibilitando la producción de técnicas nuevas. (Gascón, 1998, como se citó en Mejía, 2011). Lo explicado se representa mejor en la Figura 7.

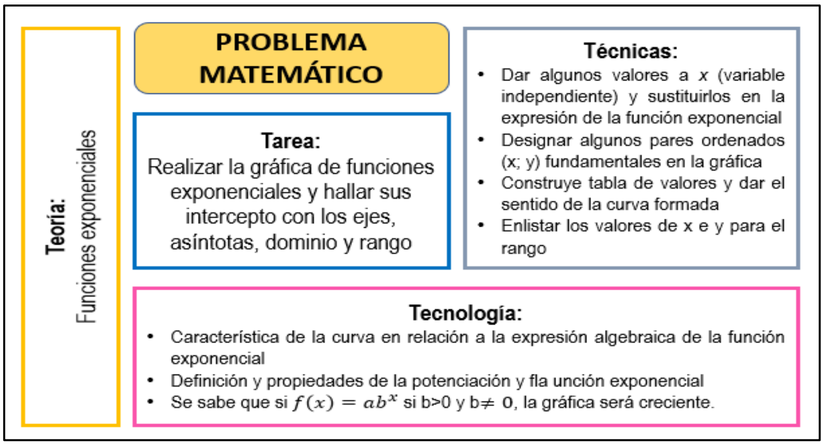
Figura 7. Representación visual de la praxeología a partir sus componentes: tarea, técnica, tecnología y teoría



Fuente: Elaboración propia

Un ejemplo claro que especifique mejor dicho gráfico lo podemos encontrar en la siguiente tabla:

Tabla 9. Un ejemplo real de praxeología con función exponencial



Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, desde la TAD, los instrumentos en la actividad matemática radicaban desde un ambiente lápiz/papel (L/P) que un ambiente CAS, pero hoy en día se observa la complementariedad entre ellos. Según Bosch, Chevallard y Gascón (2000), menciona lo siguiente:

> … las técnicas Lápiz/Papel, denominadas técnicas habituales, son necesarias para una adecuada interpretación de las técnicas CAS, también llamadas técnicas novedosas, y de esa manera el ambiente L/P y CAS permitiría el enriquecimiento de las praxeologías matemáticas, éstas se entienden como un modelo de la actividad matemática que surge alrededor de una cuestión o conjunto de cuestiones en busca de respuestas. (Bosch, Chevallard & Gascón, 2000, p. 34)

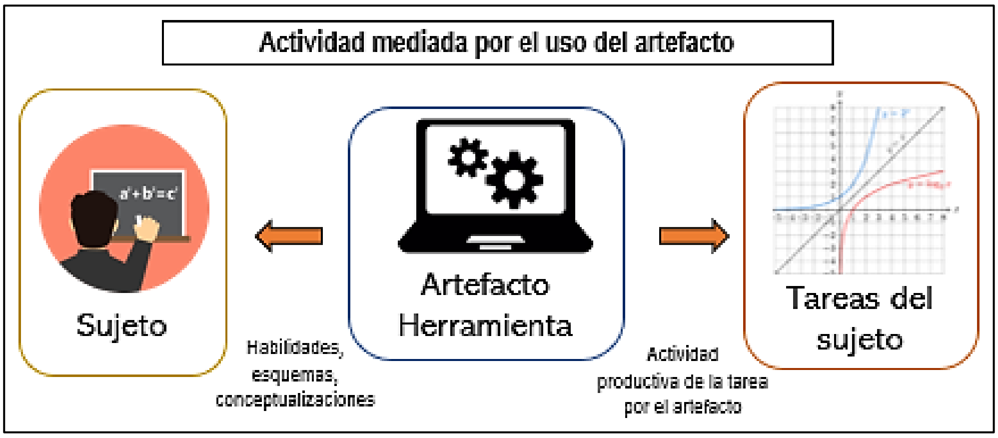
La determinación de técnicas que puedan generar en ellas vincula la aproximación instrumental e institucional, llegando a abarcar dos dimensiones importantes durante la enseñanza de las matemáticas: la didáctica y la cognitiva. Por ejemplo, en algunos casos antes de conocer o construir la gráfica de una función exponencial, se manipulan hojas de papel cuyos dobles el número de dobleces que se le hace se escriben expresión con el número de capas que se forman, con el fin de observar alguna regla de correspondencia. Posteriormente, en un ambiente L/P el estudiante podría deducir la función, el sentido de la función mediante la unión de los pares ordenados y, probablemente si la gráfica es una función creciente o decreciente. Adicional a ello, el álgebra actual excede de la manipulación de expresiones algebraicas, olvidándose otras representaciones y conexiones con otros conceptos. En contraste a ello, desde el ambiente CAS con el uso de aplicativos, calculadoras simbólicas o graficadoras mediante la ejecución de diversos comandos, podemos lograr una aprehensión global del objeto matemático de manera cualitativa, como comparar y discriminar las características de las gráficas exponenciales formadas, coordinar la expresión algebraica de la regla correspondencia de la función junto el desarrollo de la visualización del estudiante durante

De esta forma, las técnicas al ser instrumentadas por la tecnología computacional, modifican tanto sus valores pragmáticos y epistémicos del cual son comprobadas en diversos estudios de Artigue (1997), Trouche (2005), Lagrange (2002). Pues, dichos avances en la investigación también se deben a un cuestionamiento interno de las teorías científicas (como el Enfoque Instrumental) que postulan que los artefactos ejercen una influencia decisiva sobre la actividad y el desarrollo humano.

a. Una primera dialéctica: artefactos e instrumentos

Para enmarcar el camino de los conceptos involucrados en el Enfoque Instrumental, debemos hacer mención que este se comprende mejor a partir de tres dialécticas: la primera de ellas artefactos e instrumentos, la segunda; Instrumentalización e instrumentación; y la tercera, esquemas-técnicas. En este apartado se comenta sobre la primera dialéctica, artefacto e instrumento. En primer lugar, examinemos la involucración del artefacto en la mediación del aprendizaje donde el individuo interactúa intencionalmente para la ejecución de tareas. Este enfoque de la actividad mediada por artefacto se centra en el uso humano de herramientas culturales (mencionado anteriormente en la TAD) el cual será dirigida en dos sentidos: por un lado, la realización de tareas que demanda una actividad productiva, y; por otro lado, el desarrollo de recursos internos y externos como instrumentos, habilidades, esquemas y conceptualizaciones, etc., formado en los propios individuos. De esta forma, esta perspectiva tiene como análisis comprender la apropiación de herramientas culturales, usos y desarrollo de instrumentos en los individuos. En otras palabras, demanda comprender la naturaleza y el alcance de las transformaciones de tareas y/o actividades en el uso de artefactos y, por otro lado, en comprender los procesos y esquemas mentales en el desarrollo individual.

Figura 8. Diagrama que simplifica el enfoque de la actividad mediada



Fuente: Elaboración propia

Por ende, la manera en la que un sujeto usa un artefacto y la tarea para la cual se realiza, son temas relevantes en el Enfoque Instrumental. En este caso, la actividad mediada se dará a partir del uso del software GeoGebra (artefacto) el cual permitirá analizar las primeras acciones de los estudiantes (sujeto) en actividades distribuidas en una secuencia didáctica en el software aprendizaje de la función exponencial.

En segundo lugar, examinaremos el proceso de desarrollo del instrumento y su relación en la actividad mediada por un artefacto o colección de artefactos. Para ello, reconozcamos que la forma en que se utiliza un artefacto no es insustancial. Por ejemplo, todos sabemos la utilidad que puede tener un bolígrafo (dibujar, escribir, pintar, etc.), pero aquellos estudiantes que recién ingresan al sistema educativo y no sepan qué significan las letras, un bolígrafo se convierte en artefacto inútil para escribir. Tan pronto cuando aprendan a escribir, el bolígrafo se convierte en algo más que un artefacto para dibujar o pintar y se convierte en un artefacto que también usan para escribir. Junto con las habilidades en desarrollo, el bolígrafo se convierte en un instrumento para la escritura. Siguiendo a Rabardel (2002), consideraremos como instrumento cuando exista una relación significativa entre el artefacto y el usuario para un tipo específico de tarea, donde el artefacto llega a convertirse en un instrumento. Tal transformación es denominada por Rabardel como *génesis instrumental* (el cual será explicado líneas más adelante). Por razones convenientes, se presentará una definición para el artefacto e instrumento desde la teoría instrumental en la siguiente tabla.

Tabla 10. Definiendo los conceptos de artefacto e instrumento

Artefacto	Rabardel (2011), reconoce el artefacto como un dispositivo material o simbólico del instrumento o constructo psicológico que el sujeto asocia. Por ejemplo, pensemos en una calculadora o un software de geometría dinámica, mientras no sepamos qué significan sus componentes y simbolismo, se presenta como un artefacto sin algún tipo de uso. Tan pronto aprendemos, dicho se convierte en algo más que un artefacto. Sin embargo, si el estudiante no muestra ningún acercamiento usando el artefacto, no podremos detectar rastros directos de la génesis instrumental en los estudiantes.
Instrumento	De manera concisa, un artefacto junto con los esquemas cognitivos previos del sujeto en su utilización, forman lo que es denominado por Rabardel (2011) como instrumento. Además, dicho instrumento puede enriquecerse de acuerdo con la forma en que se utiliza, en la especificidad de las situaciones encontradas por el sujeto en sus actividades.

Nota: Se precisa estos conceptos de esta forma para visualizar mejor la primera dualidad

Un detalle no menor también radica en las restricciones presentadas con la actividad artefactos, los cuales considera tres tipos de restricciones importantes:

Tabla 11. Restricciones encontradas en el artefacto

Restricciones	Interpretación
Restricciones de modalidades de existencia	Relacionada con propiedades propias del artefacto en su presentación de objeto material o cognitivo
Restricciones de intencionalidad	Relacionada con la especificad del artefacto si este quiere usarse para producir transformaciones
Restricciones de estructuración de la acción	Relacionada con la pre estructuración de la propia acción de los sujetos.

b. La noción de instrumento

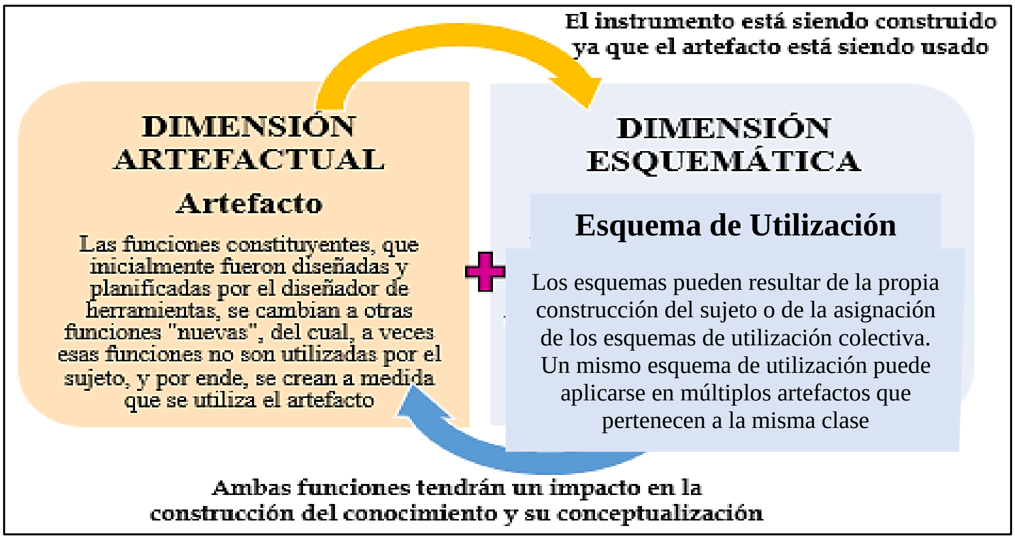
Luego de diferenciar ambos términos, es pertinente afirmar que el instrumento juega un rol importante dentro del Enfoque Instrumental. En sus inicios, a partir de la

Teoría de los Instrumentos Psicológicos: todo instrumento siempre tendrá un fin por el cual es desarrollado y presentado a los aprendices. Tal instrumento se desempeñará como instrumento material cuando sea utilizado por un individuo para controlar los procesos naturales asociados al instrumento (considerando sus propiedades y características propias), pero, si este mismo instrumento apoya a controlar tales procesos internos de la mente como las funciones psicológicas superiores, entonces el instrumento elegido ya no será material, sino psicológico. Luego de este primer panorama, se conceptualizará el término instrumento desde el enfoque matemático.

- **El instrumento como una entidad mixta: artefacto y utilización de esquemas mentales**

Para Rabardel y Verilon (2011), el instrumento se presenta como una entidad mixta, que vincula tanto al artefacto (dimensión artefactual) como a los esquemas de utilización que el sujeto asocia con él (dimensión esquemática). Lo dicho se presenta mejor en la siguiente Figura 3, ya que explica como ambas dimensiones se encuentran direccionadas una con otra para la construcción del instrumento. En consecuencia, la búsqueda de la comprensión de la transformación de los artefactos en instrumento, según la actividad del usuario, conlleva al desarrollo y al concepto de génesis instrumental.

Figura 9. El instrumento entendido como entidad mixta



Fuente*:* Elaboración propia

Esta entidad mixta nace tanto del sujeto como del objeto, es decir, es esta entidad la que constituye el instrumento que tiene un valor funcional para el sujeto. De ambas dimensiones, es conveniente resaltar que la dimensión esquemática determina el desarrollo de la génesis instrumental y por ende la transformación del artefacto en instrumento. En esta visión, los instrumentos no viven aislados en la realización de las tareas puesto que diferentes tipos de tareas se pueden logran con (partes de) el mismo artefacto. Además, en tales procesos, se desarrollan diferentes esquemas, por lo que se construyen diferentes instrumentos por lo que la cuestión de desarrollar una coherencia sistema de instrumentos es crucial dentro de dicha teoría. Finalmente, si bien se puede inferir que en ambas dimensiones se limita determinar las partes observables en el desarrollo del instrumento, se considera que las técnicas realizadas por los estudiantes pertenecen a la parte observable de los mismos durante el uso de sus esquemas. A manera de ejemplo, los cuestionamientos o justificaciones de los estudiantes durante la interpretación del sentido de una gráfica exponencial en la resolución de un tipo determinado de tareas son representados mediante técnicas propias que reflejan sus esquemas.

- **El instrumento como indicador del desarrollo cognitivo**

Si bien es cierto que hasta el momento hemos desarrollado la descripción del desarrollo y/o formación de nuevos esquemas mentales en acciones que demanden diversos procesos cognitivos, no habría ninguna relevancia alguna o transformación sin la presencia de un mediador. Ante ello, Rabardel comenta que:

> La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse. (Rabardel, 2011, p.72)

Esta funcionalidad de instrumento y la génesis instrumental tiene como resultado el modelo de *Situaciones de la Actividad Instrumentada*, donde se configura y explica mejor cómo el sujeto se apodera del objeto a partir de la mediación del instrumento, lo cual puede incluir dos tipos de componentes:

- **Componentes de mediación epistémica**, orientado hacia una *conciencia* del objeto, sus propiedades y sus cambios en consonancia con las acciones del sujeto
- **Componentes de mediación pragmática**, orientado a la *acción* sobre el objeto lo que significa su transformación. Por ejemplo, los sujetos manipulan los cursores y buscan identificar los efectos de sus acciones mediadas a través de los movimientos de las diferentes partes del software GeoGebra (barra de herramientas, tipo de vistas, barras de entrada, etc.).

Dicho modelo, será presentado posteriormente en la construcción de las secuencias de actividades mediadas por el GeoGebra en el aprendizaje de la función exponencial.

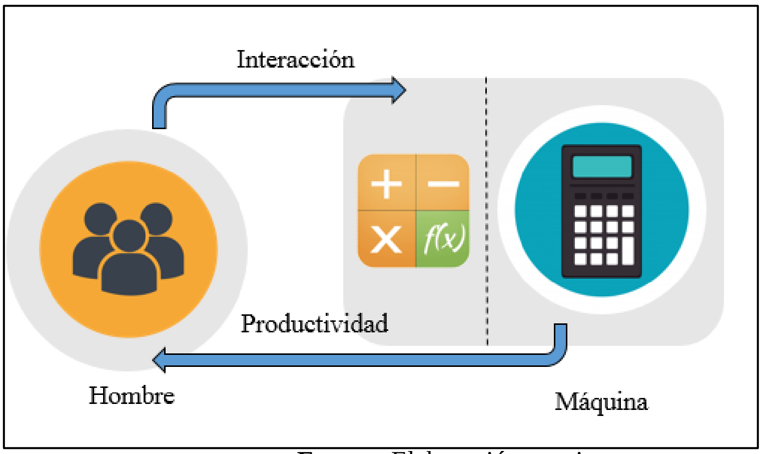
Figura 10. Adelanto a la Génesis instrumental

Fuente: Elaboración propia, adaptado de Rabardel (1995)

c. Modelo de actividad instrumentada: relación sujeto-instrumento-objeto

Un modelo de sistema humano-artefacto por ejemplo, solamente estaría interesado en la cuestión de la distribución de funciones entre humanos y el dispositivo. Los distintos ajustes de una calculadora científica en sus modos de operación (uso del SHIFT, ALPHA, cambio de valores usando MATRIX, uso de tabla) pueden ser realizados por el artefacto (modo automático) o por el usuario (modo manual). Entonces, en este enfoque la distribución de funciones entre el hombre y el artefacto son considerados como dos entidades heterogéneas sobre las cuales se trata de crear un medio/ambiente para su interacción, pero que en todo momento éste se encuentra bajo el control del usuario (ver Fig. 10).

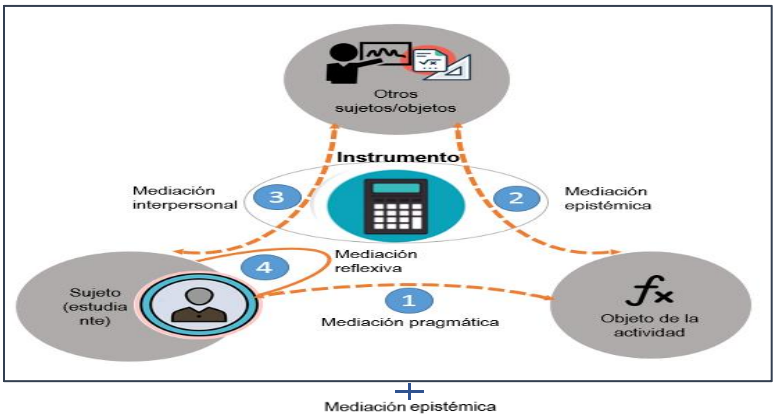
Figura 11. Diagrama simplificado del enfoque hombre-artefacto desde la ergonomía



Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, en un enfoque de tipo de actividad instrumentada, la relación con los objetos de la actividad aparece y será lo que mantendrá la atención. La actividad tiene dos tipos de orientación, por un lado, la realización de tareas en el uso de los artefactos vista como la actividad productiva, y, por otro lado, el desarrollo de recursos internos y externos (instrumentos, habilidades, esquemas y conceptualizaciones, sistemas de valores, etc.) donde el sujeto produce las condiciones y los medios para la actividad futura (Rabardel & Bourmaud, 2003). De esta forma se distingue tres orientaciones de la mediación a través de instrumentos: hacia el objeto de la actividad, hacia los otros sujetos y finalmente hacia uno mismo.

Figura 12. Principales mediaciones instrumentales en el modelo de actividad instrumentada



Fuente: Adaptado de Rabardel (1995)

Esta representación fue utilizada en un inicio por Rabardel (1995), donde se especifica las mediaciones presentes en dicha relación y que fue adaptado al contexto del uso de una calculadora científica por conveniencia al presente estudio. Como se aprecia, encontramos *mediaciones epistémicas* con el objeto de la actividad: en el caso de la calculadora, su interfaz permite, una mediación epistémica de la gráfica de una función que se acaba de formar. El sujeto analiza y decide conservar o modificar los valores de ello, teniendo en cuenta las características de la función inicial. También en el uso de la calculadora, se establecen *mediaciones pragmáticas*, dirigidas a la acción sobre el objeto: todos los controles de la calculadora que permite la formación de sistemas de ecuaciones o creación funciones por tramos (identificación de los puntos de intersección con los ejes, delimitar intervalos, etc.). Además, la actividad del sujeto se orienta hacia los demás, a lo que Rabardel (1995) refiere como *mediaciones interpersonales* donde pueden ser de carácter epistémico o pragmático: el uso de la calculadora posibilita relaciones con otros individuos distintos con aquellos que usan la técnica tradicional en la práctica de las matemáticas. Puesto que la gráfica de una función o la solución existente o inexistente de un sistema de ecuaciones pueden ser examinado de forma inmediata y conjunta por ambos grupos de personas. Finalmente, el sujeto encuentra relación consigo mismo al conocerse, gestionarse y transformarse por medio del instrumento, a lo que se conoce como mediación reflexiva. En nuestro ejemplo, el sujeto puede probar distintas realidades y situaciones en la variación de valores y/o signos en la construcción de un gráfico de función conllevando a situaciones particulares, estados interiores que van más allá del marco temporal de una determinada actividad. Esto último, se relaciona con la primera teoría presentada. Vygotsky hizo de las mediaciones hacia uno mismo y hacia los demás una característica de un tipo particular de instrumento: los instrumentos psicológicos. Posterior a ello, dicho esquema orientará al esquema de Situaciones de la Actividad Instrumentada hecha por Rabardel y Verilon (1995) en su Enfoque Instrumental.

3.2.2 Génesis instrumental: un proceso que concierne tanto al artefacto como el objeto matemático

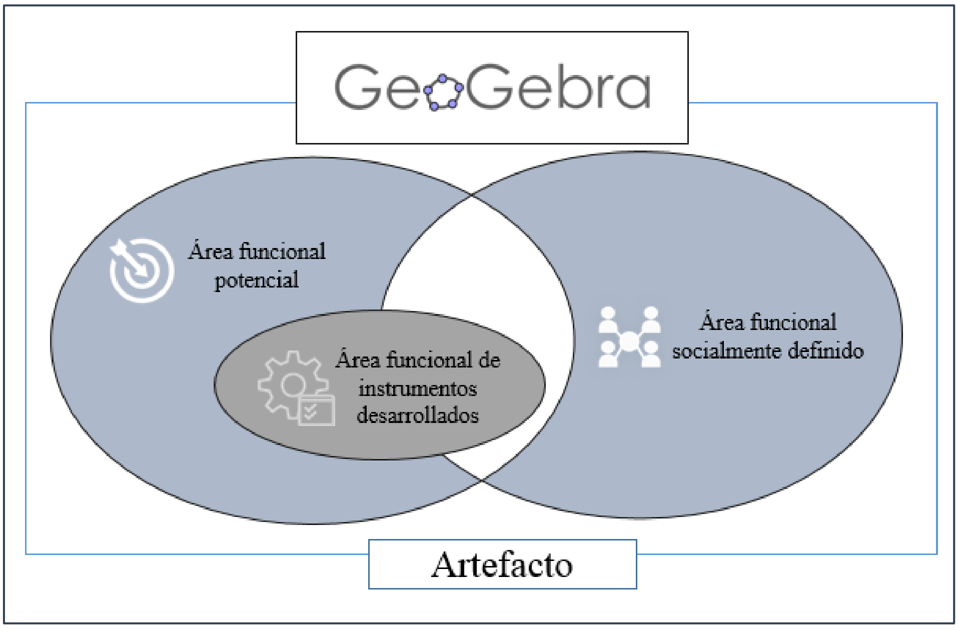
Hasta el momento, se ha establecido el concepto de génesis instrumental de manera apriorística, es decir, la formación de artefactos en instrumentos conlleva. De manera general, se estableció que la búsqueda de la comprensión de la transformación de los artefactos, según la actividad del usuario, en instrumento (a partir de la aparición de nuevos esquemas de usos) ha llevado al concepto de génesis instrumental (Rabardel, 2011). Además, considerando lo dicho por Trouche (2004), sostiene que este término denominado *génesis instrumental* es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo. Sin embargo, es necesario consignar ciertas condiciones con el fin de cimentar el concepto de génesis instrumental: el artefacto no es necesariamente material, puede ser simbólicos: mapas, gráficos, tablas, métodos, etc. Desde el planteamiento de Rabardel (1999) el artefacto cumple un diseño a manera de “conjunto de funciones”, tal como se expresa en la Figura 13.

En esta aproximación hacia el artefacto se define tres valores funcionales: el primero es la esencia propia del artefacto, es decir, que intrínsecamente ya lo *posee* (área funcional potencial), el segundo valor referido a *los usos reales que se le da en la sociedad* (área funcional socialmente definido) y, el último valor repercute a lo que *se construye* (área funcional de instrumentos desarrollados). Con relación al GeoGebra, sus potencialidades que brinda por sí mismo son destacadas y sobresalen a partir de las intencionalidades del sujeto en una actividad determinada (hallar la ecuación en función de la pendiente y ordenada, representar rectas y/o poliedros, polígonos, representar funciones por tramos o establecer coordenadas en plano bidimensionales y tridimensionales, etc.). Sin embargo, esto solo establece parcialmente la construcción de instrumentos. En la segunda área funcional, se describe la aparición de esquemas sociales de uso (ESU)[7], que corresponde a un proceso colectivo, social y cultural que atribuye al artefacto, lo cual significa que muchos sujetos han tenido la posibilidad de relacionarse en distintas formas con el artefacto. Finalmente, la última área funcional corresponde a los instrumentos realmente desarrollados por los sujetos, que involucra aprendices y profesores durante la génesis instrumental[8].

Figura 13. Estructura de valor funcional del artefacto (GeoGebra)

[7] Al pasar de una perspectiva individual a una más social, Trouche (2003) distingue diferentes facetas de la noción de esquema y menciona su extensión más allá del individuo por lo que denomina esquemas sociales o esquemas de uso social (ESU).

[8] Conocer los valores funcionales del artefacto es de gran importancia educativa porque significa que a partir de los mismos artefactos, tanto los aprendices como los profesores pueden fabricar varios instrumentos: un primer caso donde el docente define el área funcional que desea o, un segundo caso, este se desarrolla por sus alumnos, teniendo en cuenta de qué sus esquemas de usos desarrollados y los patrones construidos o para construir a partir de diversos objetivos de aprendizaje.



Fuente: Adaptado de Rabardel (1999)

- La identidad del instrumento no se reduce al artefacto material o simbólico: no es necesario que la totalidad del artefacto se constituya como el instrumento del sujeto, sino solo una fracción del mismo artefacto puede ser útil puesto que aquello habría desarrollado las propiedades relevantes para la acción de la génesis instrumental.
- El instrumento es una entidad mixta que incluye, por un lado, el artefacto material o simbólico y, por otro, los esquemas de uso, es decir, las representaciones que forman parte de las habilidades del usuario, necesarias para uso del artefacto.
- A partir de la génesis instrumental se observa el impacto del uso de instrumentos en la actividad cognitiva de los usuarios. Además, dichos instrumentos nunca son los únicos que pudo haber desarrollado el sujeto debido a otras potencialidades del artefacto o esquemas que podrían haber sido movilizados, que quizás lo desarrollen más tarde.
- La génesis instrumental también involucra el desarrollo de esquemas que evolucionan hacia técnicas, los cuales tienen sus propias limitaciones derivadas de la especificidad del artefacto (calculadora o software) y el tema matemático (Rabardel y Verilon, 1995)

En tal sentido, Rabardel y Verilon proponen un reagrupamiento de las situaciones de actividad presentadas en la génesis instrumental, el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada (o por sus siglas original "IAS: Instrumental Activity Situations") para caracterizar las relaciones entre sujeto, instrumento y objeto (Figura 8), el cual intenta explicar cómo el sujeto se apodera del objeto a partir de la mediación del instrumento.

Figura 14. Modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada

S-I	Interacción sujeto-instrumento
S-Om	Interacción mediada sujeto-objeto
dS-O	Interacción directa sujeto-objeto
I-O	Interacción instrumento-objeto

Fuente: Adaptado de Rabardel (1995, p. 12)

Estos tres polos son los más importantes en la Génesis Instrumental, por ende, para analizar las acciones del sujeto (los estudiantes de esta investigación) en el aprendizaje del objeto (función exponencial) mediado por un instrumento (software matemático GeoGebra) creemos necesario considerar este modelo ya que nos permitirá estudiar algunas interacciones entre los elementos de la triada en la situación de aprendizaje que se plantea en el presente estudio. Para ello, hay que considerar que el instrumento constituido está vinculado a las circunstancias únicas de la situación y a las condiciones a las que se enfrenta el sujeto

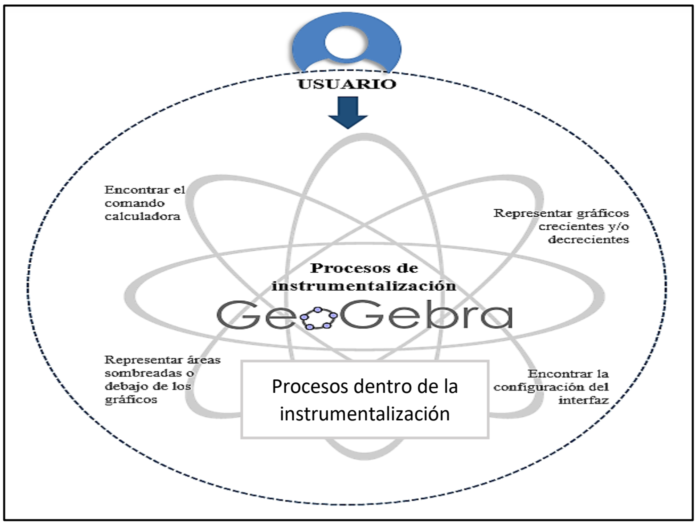
a. Una segunda dialéctica: Instrumentalización e instrumentación

Luego de examinar la primera dialéctica en la teoría y elaborar una descripción sobre los artefactos, esquemas de usos de los sujetos e instrumentos como conceptos claves en la construcción de la génesis instrumental, existe otra dialéctica que parte de este último concepto. Hay un proceso de instrumentalización en el que el aprendiz transforma el artefacto para usos específicos, y simultáneamente un proceso de instrumentación, en el que el sujeto es formado por acciones con el artefacto. En particular, se analiza dichos procesos con el fin de comprender las formas en que las necesidades matemáticas de las técnicas cambian a medida que la tecnología computacional ingresa al escenario institucional (Balacheff, 1994) y a las cuestiones de diseño para la génesis instrumental (Guin y Trouche, 1999 como se citó en Hoyle y Noss, 2003).

- **Proceso de instrumentalización**

Este proceso de transformación implica que el usuario aprenda a usar el artefacto en determinadas actividades donde este se convierte en un instrumento para un usuario y sobre cómo la acción influye en la actividad y el conocimiento del usuario. Por tanto, la instrumentalización del artefacto da lugar a nuevas funciones, de forma temporal o permanente. En palabras de Rabardel (1995): "los procesos[9] de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc." (p. 47). Para ejemplificar de manera concreta, podemos establecer algunas de las acciones que representan procesos de instrumentalización mediante el uso del GeoGebra.

Figura 15. Representación de algunos procesos de instrumentalización en posibles actividades mediado por GeoGebra



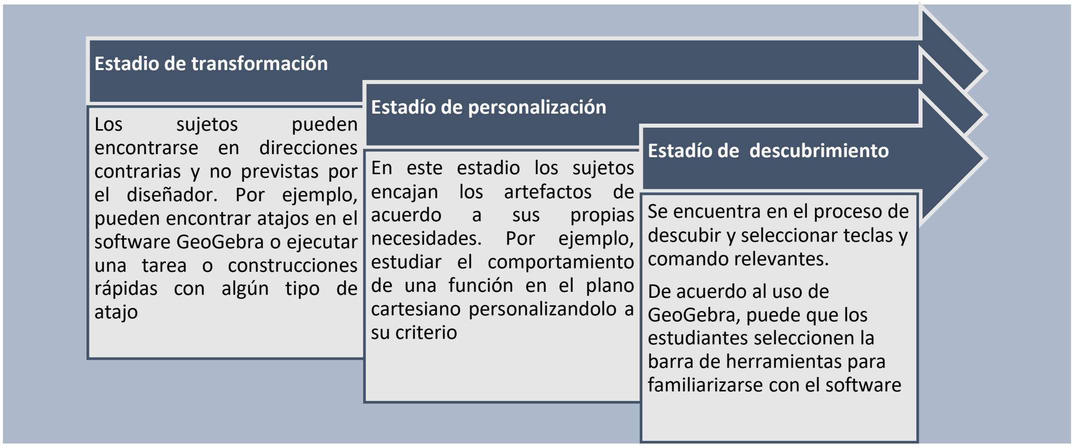
Fuente: Elaboración propia

En base a lo presentado también podemos estudiarlo desde un punto de vista más centrado en la estructura del plano del funcionamiento puesto que el GeoGebra parte

[9] Aclaramos que la palabra procesos no hace mención a la existencia de varios procesos, sino que son procesos que se movilizan dentro de la instrumentalización

como uno de los artefactos procedentes de las TIC. Desde la perspectiva de Trouche (2004) podemos encontrar tres estadios con relación al proceso de instrumentalización:

Figura 16. Los tres estadios del proceso de instrumentalización



Fuente: Adaptado de Trouche (2004)

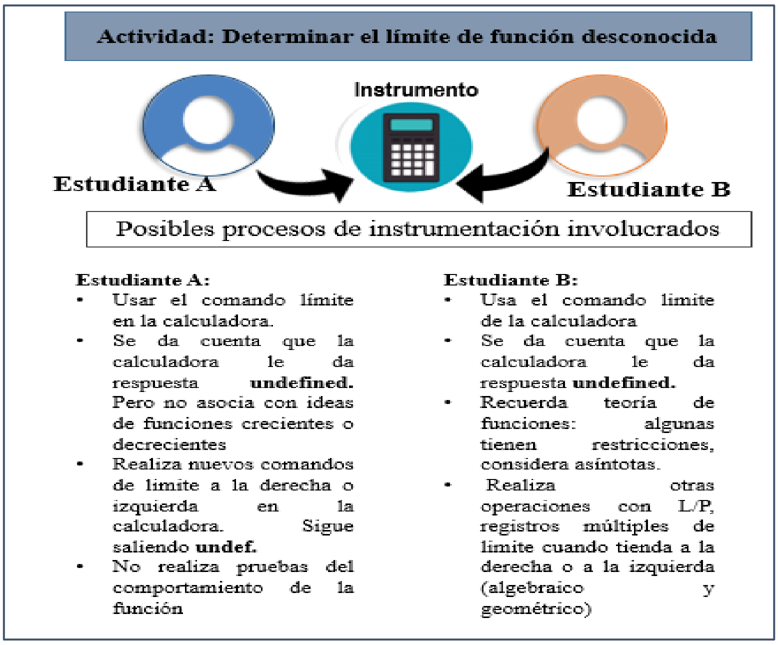
- **Procesos de instrumentación**

En contraposición al proceso anterior, en palabras de Rabardel (2011):

> "Los procesos de instrumentación están relacionados con el sujeto, con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc." (p.155)

Esto significa que, al ser un proceso dirigido hacia el sujeto, las limitaciones y el potencial del artefacto influyen y condicionan la acción del individuo. Podemos mostrar un ejemplo con el artefacto calculadora en la siguiente figura:

Figura 17. Representación de procesos de instrumentación en posibles actividades mediadas por una calculadora



Fuente: Elaboración propia

Finalmente, respecto a lo descrito, la investigación se centra en los procesos de instrumentalización, que según Rabardel (1995):

> "La instrumentalización puede definirse como un proceso de enriquecimiento de las propiedades intrínsecas del artefacto por parte del sujeto. Un proceso que se basa en las características y propiedades intrínsecas del artefacto y les da un estatus en función de la acción en curso y de la situación". (p. 34)

En este sentido, con esta perspectiva teórica se logra una mirada didáctica de la integración de tecnologías informáticas en el aprendizaje de las matemáticas, de manera que estos también son capaces de crear estructuras de conocimiento más significativas en la enseñanza de las Matemáticas que llegan a impartir en las sesiones de clases en comparación de los métodos convencionales.

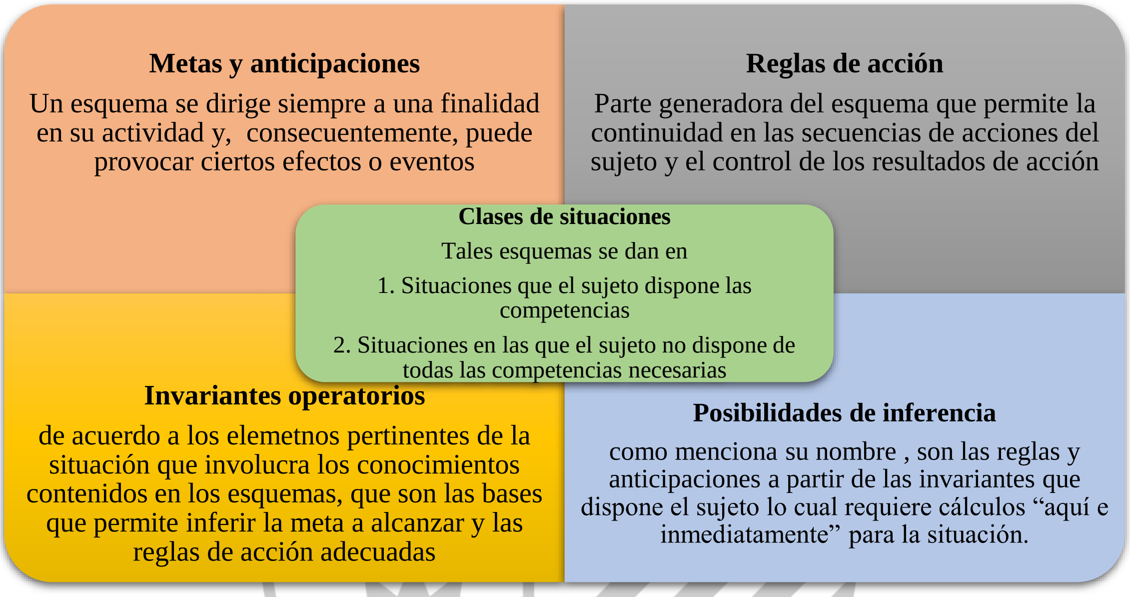
b. Una tercera dialéctica: esquema-técnica

En esta última dialéctica tomamos como referencia la noción de esquema propuesta por Vergnaud (1996), concepto fundamental en la teoría de Vergnaud[10], que define esquema a "la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones". (p. 136) Además a partir de los esquemas el autor sugiere que se deben investigar cada conocimiento en acción de los sujetos que vienen a ser los

[10] Teoría de los campos conceptuales

elementos cognitivos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria. Aunque dicho concepto no precisa con exactitud lo que involucra un esquema, el autor plantea ciertos *ingredientes de los esquemas* donde son presentadas en diversas clases de situaciones, tal distinción y explicación de lo que involucra el concepto de esquema se ejemplifica mejor en la siguiente Figura.

Figura 18. Aproximación a la definición de esquema según Vergnaud (1993)



Fuente: Adaptado de Vergnaud (1993, p.2)

Entonces, a partir de dicho estudio, Rabardel (2011) hace uso de del concepto de esquemas relacionas con la utilización de un artefacto, lo cual denomina esquemas de utilización. En su estudio presenta tres tipos de estatus de los esquemas de utilización, ver Figura 19.

Figura 19. Concepto y estatus de los esquemas de utilización

Esquemas de utilización

Se define como el conjunto de cualidades generales que se produce en una acción de manera que dicha acción puede ser aplicadas en nuevos contextos. Asimismo, Manrique (2020) menciona que stos esquemas abarcan dos dimensiones: una privada y otra social, donde la primera dimensión es propia de un individuo y la segunda es colectiva o grupal. Por tal motivo, Rabardel (2011) establece tres clases de esquemas ya que estas presentan una relación mutua .

Esquemas de Uso:

Dirigida a las actividades secundarias, relativas a caracteristicas y particulares del artefacto

Esquemas de acción instrumentada:

Dirigida a las actividades principales, dado por el acto global qu tiene como meta operar transofrmaciones sobre el objeto de la actividad

Esquema de acción colectiva instrumentada:

aparece cuando los usos instrumentales se encuentra en un contexto de actividad colectiva. se da cuando el colectivo comparte un mismo instrumento o trabaja con dicho instrumento en la clase

Fuente: Adaptado de Rabardel (2011)

Entonces si queremos usar algún tipo de artefacto, un estudiante desarrolla un esquema de acción instrumentada en la interacción con dicho artefacto, por ejemplo, un esquema de resolución de sistema de ecuaciones utilizando una calculadora gráfica. Tal esquema está hecho de gestos para usar el artefacto, las reglas de acción y elementos conceptuales, tanto orientando la actividad, como desarrollada por esta actividad. El desarrollo de tales esquemas también involucra que se desarrolle la génesis instrumental. En esta visión, un instrumento consiste en parte del artefacto movilizado por un usuario para lograr un tipo de tarea y el esquema que desarrolla en esta actividad (Rabardel y

Verillon, 1995). En tales procesos, se desarrollan diferentes esquemas, por lo que se construyen diferentes instrumentos.

Después del desarrollo del marco teórico, en el siguiente capítulo, se presenta los procedimientos metodológicos de la investigación y la estructura de la secuencia de actividades de la parte experimental de la micro ingeniería de la investigación.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se abordará las nociones principales de la metodología utilizada, la Ingeniería Didáctica, las fases a desarrollar, propias de la metodología, y, por último, su aplicación y análisis será descrito mientras se desarrolla la secuencia didáctica. Pues, como primer alcance debemos entender que este constructo se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995).

4.1 Tipo y nivel de investigación:

La presente investigación es de naturaleza cualitativa experimental, cuyos lineamientos vistos en la Ingeniería Didáctica (ID) se acopla mejor al presente trabajo. Dada la finalidad del objeto del estudio, se pretende dar respuestas al proceso de instrumentalización en los estudiantes al resolver una secuencia de actividades, mediada por un software matemático, realizando un análisis a priori y a posteriori (enmarcado en la metodología de la Ingeniería Didáctica) que incorpora este nuevo medio tecnológico sobre la base de la cual se realicen los procesos de enseñanza en las matemáticas. Asimismo, durante la experiencia se pretende dar respuesta a los objetivos que involucra la acción de los sujetos y requieren una interpretación adecuada de los mismos, es decir, las interacciones apreciadas entre estudiantes-GeoGebra, estudiantes-saberes previos, durante la resolución de la secuencia de actividades en el GeoGebra.

4.2 Ingeniería didáctica

En un inicio, hay que mencionar que la primera concepción de Ingeniería Didáctica radica en los años 80 a partir de las sucesivas escuelas de didácticas de las matemáticas organizadas en territorio francés. Inicialmente, surgió como un tema específico de estudio que posteriormente sería impartido en cursos y sesiones por los matemáticos Yves Chevallard y Guy Brosseau. La consolidación y evolución de la ingeniería didáctica como metodología parte de la necesidad de desarrollar metodologías especificas basadas en la didáctica de las matemáticas, puesto que anteriormente la educación matemática se integraba a los campos de la psicología para asegurar alguna legitimidad científica de la investigación. En este contexto, Brousseau rechazó el uso exclusivo de la psicología por tres razones principales:

> el trabajo de Piaget se centró en niños individuales; los enfoques constructivistas son insuficientes para modelar los procesos de aprendizaje de las matemáticas de manera satisfactoria, es decir, sus dimensiones sociales y culturales no se tienen suficientemente en cuenta y estos enfoques no articulan completamente las relaciones entre la actividad didáctica en juego y el contenido matemático, cuyo aprendizaje se está estudiando. (Artigue, 1999, p. 1378)

Teniendo en cuenta estas tres razones, el concepto de *situación* propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brosseau, empezó a definirse como el modelo ideal del sistema de relaciones entre estudiantes, un maestro matemático y el medio. En este sentido, la ingeniería didáctica se convirtió en el medio más dominante para probar la validez de los supuestos teóricos del TSD (como el refinamiento de la noción de contrato didáctico) (Artigue, 1999), pero que, además, su evolución llegó a ser aplicada a otros modelos teóricos como la Teoría Antropológica de la Didáctica.

Ahora bien, como segundo punto, en la naciente didáctica de las matemáticas que fue construida sobre la base de la teoría constructivista del conocimiento, se introduce la palabra ingeniería porque el proceso que este enfoque conlleva es comparable al trabajo de un ingeniero, puesto que:

- Al realizar un proyecto el ingeniero se basa en el conocimiento científico de su dominio (el profesor planea y ejecuta secuencias de enseñanza-aprendizaje para lograr el aprendizaje de un conocimiento matemático).
- En el desarrollo de dichos proyectos hay interacciones entre el profesor y estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las interacciones de los alumnos en

función de las decisiones y elecciones del profesor (posiblemente por medio del contrato didáctico[11] previamente establecido). Y, a medida que somete dichas situaciones en el proyecto, el profesor da cuenta de la evolución y aparición de nuevos fenómenos en base al conocimiento matemático enseñado. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto resultante de un análisis a priori, y un proceso, que no es otra cosa que una adaptación de la puesta en funcionamiento del producto mencionado a las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1996).

En este sentido, "la ID consiste en diseñar, regular y realizar observaciones controladas de experimentos (situaciones) donde cierto conocimiento matemático aparece como la forma óptima de abordar un problema matemático" (Herbst & Kilpatrick, 1999, p.7). En tercer punto, en la ID no se realiza análisis estadístico de grupos experimentales y grupos de control. Su validación es interna que se basa en la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori. De acuerdo con ello, esta metodología que propone Artigue (1995) distingue dos niveles: nivel de micro ingeniería y nivel de macro ingeniería:

> Las investigaciones al nivel de micro ingeniería son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema, son locales y toman en cuenta la complejidad de los fenómenos en el aula. Las investigaciones a nivel de macro ingeniería son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Ambos niveles se complementan, sin embargo, las investigaciones de micro ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las de macro ingeniería implican dificultades metodológicas e institucionales. (Alvarez, 2017, p.58)

Por último, antes de conocer las fases de la presente metodología, es pertinente mencionar que la ID se presenta como un enfoque de doble rol:

1. Uno como metodología de investigación: con la intención de identificar y desencadenar fenómenos didácticos cruciales que se presentan en la ejecución de secuencias de aprendizajes. En palabras de Montoya (2013), "esto permitió en los

[11] Involucra las situaciones designadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, estas pueden ser dadas en situaciones a-didáctica, donde los estudiantes se involucran en la resolución de un problema, sin la guía directa del profesor, o situaciones didácticas. Empero, entrelazadas producen aprendizajes con la hipótesis de que "haciendo se aprende", dado el modelo1 de enseñanza-aprendizaje constructivista.

años ochenta el surgimiento de conceptos fundamentales como: las paradojas incluidas en el contrato didáctico, la noción de institucionalización, la obsolescencia didáctica, memoria didáctica y la reproducibilidad” (p. 40)

2. El otro rol como un método a la creación del diseño didáctico en la perspectiva de intervención controlada: esto significa la producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje que involucra el diseño, implementación, seguimiento y análisis de secuencias didácticas. De igual forma, Montoya (2013) menciona que estos productos son difundidos en diferentes canales a través de las publicaciones de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM), libros de textos, repositorio de pregrado en la formación de docentes en servicio, etc.

A continuación, se especificará cada una de las fases de la ingeniería didáctica que estará orientado a las observaciones y el análisis de las secuencias de aprendizaje en el aula, de la función exponencial en un medio de interacción con el software matemático GeoGebra.

4.2.1 Fases de la Ingeniería Didáctica (ID)

Según Artigue (2011), la ID como metodología contempla cuatro fases definidas en distintos espacios temporales acorde al proceso experimental que este supone: la primera es el análisis preliminar, la segunda es la de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la tercera es la de experimentación y, finalmente, la cuarta fase es de análisis a posteriori y de evaluación.

a. PRIMERA FASE: Análisis preliminar

En esta fase introductoria se investigan los antecedentes necesarios para la concepción de la secuencia didáctica en relación con el objeto de estudio, por lo cual Artigue (1995) menciona que se debe considerar lo siguiente considerando previamente los objetivos específicos de la investigación:

- El *análisis epistemológico de los contenidos* considerados a enseñar.

- El *análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos*, enfocado en el estudio de la programación escolar y los libros de textos correspondientes al contenido matemático escogido.
- El *análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos* de cara al objeto matemático en estudio que marcan la evolución de los mismos, y
- El *análisis de las restricciones* donde se va a situar la realización didáctica.

Una vez considerado todo ello, la investigadora recalca tres dimensiones/componentes importantes para el análisis que distinguen a la Ingeniería Didáctica:

Dimensión epistemológica

Se refiere al conocimiento matemático que se desarrolla en las escuelas. En este caso, se analizará los contenidos y características contemplados en la enseñanza de la función exponencial.

Dimensión cognitiva

Este análisis está centrado en las concepciones de los estudiantes, las características de ellos mismos y las dificultades/obstáculos que puedan enfrentarse durante las nociones presentadas en las situaciones didácticas.

Ahora bien, sobre ambas dimensiones (epistemológica y cognitiva) se detalló mejor en el capítulo II dedicado al estudio de la función exponencial, debido al contenido que esta parte amerita nos basamos en libros matemáticos, donde presentan una definición formal, consensuada y rigurosa de la función exponencial, pues en ella se realiza un estudio epistemológico de la función exponencial. Y también, se recurre a diversas investigaciones y estudios convenientes para determinar la dimensión cognitiva en el estudio de la función exponencial. Asimismo, se presentó en dicho orden para no perder el hilo de la metodología y el orden que mantiene el presente estudio.

Por ahora, podemos complementar esta dimensión infiriendo las capacidades, desempeños y competencia (de acuerdo con el actual Currículo Nacional 2017) que los estudiantes del 4° grado del nivel secundaria han logrado durante su formación académica escolar. En nuestra currícula, podemos basar las capacidades cognitivas de nuestros estudiantes en el área de matemática a partir de los estándares de aprendizaje de cada una de las competencias según el ciclo que el estudiante se encuentre. De acuerdo al objeto de estudio, la función exponencial, podemos inferir sus procesos cognitivos adquiridos y por adquirir de los estudiantes de cuarto grado a partir del estándar de la competencia *"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"* (MINEDU, 2017, p. 77) perteneciente al Ciclo VII. En este apartado, se menciona lo siguiente:

> El estudiante resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión […] de la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema […].

Asimismo, para motivos pertinentes del estudio, es necesario indicar las capacidades y desempeños que hasta el momento han podido desarrollar los estudiantes en el área de matemática[12], que tiene una relación estrecha con la función exponencial.

Tabla 12. Capacidades del área de Matemática según Currículo Nacional

Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas	• Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. • Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, a inecuaciones ($ax \pm b < c, ax \pm$

[12] Currículo Nacional 2017, p. 144-145

	$b > c, ax \pm b \leq c \; y \; ax + b \geq c, \forall \, a \in Q \; y \; a \neq 0$), a ecuaciones cuadráticas ($ax^2 = c$) y a funciones cuadráticas ($f(x) = x^2, f(x) = ax^2 + c, \forall \, a \neq 0$) con coeficientes enteros y proporcionalidad compuesta. • Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó representó todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes.
Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	• Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica y reconoce la diferencia entre un crecimiento aritmético y uno geométrico […] • Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e interceptos, su eje de simetría, vértice y orientación, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.
Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales	• Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas, y solucionar ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, usando productos notables o propiedades de las igualdades. Reconoce cómo afecta a una gráfica la

	variación de los coeficientes en una función cuadrática.
Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia	• Plantea afirmaciones sobre la relación entre la posición de un término y su regla de formación en una progresión geométrica, y las diferencias entre crecimientos aritméticos y geométricos, u otras relaciones de cambio que descubre. • Plantea afirmaciones sobre el significado de los puntos de intersección de dos funciones lineales que satisfacen dos ecuaciones simultáneamente, la relación de correspondencia entre dos o más sistemas de ecuaciones equivalentes, u otras relaciones que descubre. • Plantea afirmaciones sobre el cambio que produce el signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica, relaciones entre coeficientes y variación en la gráfica, u otras relaciones que descubre.

Finalmente, reconocer dicha estructura en el campo cognitivo nos permite asegurar un estándar mínimo en las competencias ya desarrolladas por los estudiantes lo cual nos ayudará a prever y controlar dificultades en la experimentación, como se describirá en el Capítulo V.

Dimensión didáctica

Esta dimensión se encuentra asociado a las características del sistema educativo y de la docencia, es decir, es la dimensión del conocimiento matemático en juego tal como se expresa en la escuela y los efectos que ocasiona. De acuerdo con la dimensión didáctica, Almouloud (2014, como se citó en Advíncula, 2017), nos encontramos en el análisis de la organización didáctica del objeto matemático que se pretende investigar, por tanto, este tópico será tratado al describir el tratamiento que se da a las funciones exponenciales en el área de matemática en estudiantes del cuarto grado, las estrategias delimitadas en el sílabo y el tratamiento del objeto matemático en los textos de consultas referenciados en dicho documento, que incluye el libro de actividades “Matemática 5” perteneciente a la editorial Santillana. Finalmente, como parte de la metodología se elaborará la secuencia didáctica (incluyendo cantidad de horas que se impartirá a las nociones previas y al objeto de estudio) que tiene como focos de atención la función exponencial y uso del software GeoGebra en el área de matemática.

La función exponencial y los aspectos curriculares en el área de matemática correspondiente a estudiantes de cuarto grado de secundaria

La función exponencial, en su manera formal, es tratada dentro los dos últimos grados (4to y 5to de secundaria) en la Educación Básica Regular (EBR) y en los dos últimos grados en la Educación Básica Alternativa (3ro y 4to). Esta clasificación y equivalencia se establece a causa del sistema educativo peruano. Como nuestros estudiantes involucrados pertenecen a la modalidad EBR podemos realizar la siguiente comparación entre uno y otro grado, tal como se expresa en la siguiente Tabla 13:

Tabla 13. Competencias y capacidades del área de Matemática

COMPETENCIA	CAPACIDADES	GRADOS	
		4to de secundaria	**5to de secundaria**
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	**Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas**	Evalúa expresiones algebraicas o gráficas (modelo) planteadas para un mismo problema y determina cuál representó mejor las condiciones del problema.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a funciones cuadráticas con coeficientes racionales y a funciones exponenciales.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el dominio y rango de una función, la	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la dilatación, la contracción, los desplazamientos horizontales y verticales,

	relación entre la variación de sus coeficientes, y los cambios que se observan en sus representaciones gráficas.	las intersecciones con los ejes de una función cuadrática, y la función exponencial al variar sus coeficientes.
Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas óptimas para determinar términos desconocidos […]	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos óptimos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y exponenciales, usando identidades algebraicas o propiedades de las desigualdades.

Fuente: Programación Curricular EBR Nivel Secundaria (MINEDU, 2017)

A partir de las capacidades y desempeños presentadas en la tabla anterior, es necesario considerar los temas que se desarrollan, anteceden y se encuentran relacionados a la secuencia didáctica que se establecerá de la función exponencial. Estas son las siguientes:

Figura 20. Planificación Curricular del área de Matemática en la IE

PLANIFICACIÓN CURRICULAR DEL ÁREA DE MATEMÁTICA – 2021

TRIMESTRE	UNIDAD	COMPETENCIAS				
		RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD	RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO	UNIDAD	RESUELVE PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACION	RESUELVE PROBLEMAS DE GESTION DE DATOS E INCERTIDUMBRE
I	U 1	Bienvenida Normas de convivencia criterios de evaluación		U3		
	U 2	Notación científica- exponencial. Lógica proposicional inferencias Interés simple compuesto Interés a la renta. 3 Semanas	Teoría de exponentes Productos notables Cocientes notables Sistemas de Ecuaciones Lineales 3 Semanas		Sistemas angulares. Razones trigonométricas ángulos notables, ángulo cualquiera, complementarios y suplementarios. Circunferencia trigonométrica-identidades trigonométricas ángulos compuestos-ángulos múltiples-transformaciones trigonométricas Funciones trigonométrica. Seno - coseno 5 Semanas	Gráficos Estadístico Medida de asociación entre dos variables Correlación. Ecuación de la recta de dispersión. 2 Semanas
II	U 4	Proporcionalidad Regla de tres. Porcentajes. Interés. Desplazamiento de móviles 2 Semanas	Ecuación cuadrática. Formula general. Función cuadrática. Inecuaciones. Límites. 2 Semanas	U 5	**Cuerpo geométrico** Prisma – pirámide Cilindro – cono. Escalas. Distancia entre dos puntos. Área y perímetro de figuras poligonales. Centro de gravedad de figuras planas. 7 Semanas	Probabilidad condicional. Probabilidad total 2 Semanas
III	U 6	Números complejos. 2 Semanas	Función exponencial Ecuaciones exponenciales 2 Semanas	U7	**Geometría Analítica** Pendiente de una recta. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Ecuación de la circunferencia. Ecuación de la elipse. Movimientos circulares y parabólicos 7 Semanas	Teorema de Bayes. Esperanza matemática 1 Semana

Fuente: Planificación curricular en el área de matemática del 5to grado de secundaria

Asimismo, la estructura de la planificación curricular presentada en el plan curricular del área de la institución educativa cuenta con sietes unidades de aprendizajes, donde seis de ellas están inmersas directamente a los contenidos matemáticos establecida en el Currículo Nacional para el nivel secundario. Cada unidad desarrollada en distintas semanas de acuerdo al número de sesiones dadas para cada temática. Para este estudio, el objeto matemático se estudia en la Unidad Nº 6 dentro de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” para lo cual, los temas desarrollados previamente que se encuentran relacionados a las sesiones de aprendizaje de la función exponencial son:

Tabla 14. Temas relacionados a la función exponencial

Unidad 2: *Los estudiantes practican una alimentación sana y prevención de enfermedades como la anemia, dengue, Coronavirus, etc.* ***Unidad 4:*** *Promover el ahorro que motive el bienestar familiar* ***Unidad 5:*** *Comentar a los estudiantes la importancia del reciclaje como prácticas que generan beneficios económicos y cuidado del medio ambiente*	• Notación científica- exponencial • Interés simple compuesto • Teoría de exponentes • Sistemas de Ecuaciones Lineales • Desplazamiento de móviles • Ecuación cuadrática • Función cuadrática. • Inecuaciones. Límites • Escalas. Distancia entre dos puntos

Análisis de los documentos de consulta referenciados en el silabo

El siguiente análisis está centrado en saber cómo se enseña la función exponencial. Por ello, seleccionamos dos libros de consultas para el estudiante, referenciados en la planificación curricular del área de Matemática en estudiantes del 5to grado de secundaria. La información se presenta en la Tabla 15.

Tabla 15. Libros de consulta de los estudiantes

LIBROS DIDÁCTICOS		
EDITORIAL	**TÍTULO**	**CAPÍTULOS**
Ministerio de Educación (MINEDU)	Matemática 5to grado de secundaria[13]	*Capítulo 7*: Determinamos la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de árboles que se plantarán en una campaña de forestación
Editorial Santillana	Matemática 5	*Capítulo 6:* Estudio de una función

A continuación, se describirá cada libro con la finalidad de mostrar el tratamiento otorgado al aprendizaje de la función exponencial, y de ser el caso, presentar algunas similitudes, diferencias y/o problemas presentados en cada libro matemático.

- La función exponencial se trabaja en un capítulo titulado *Estudio de una función*¸ en un subapartado titulado Funciones exponencial y logarítmica. De inmediato introduce el concepto de función exponencial, como se puede observar en la figura 21.

Figura 21. Definición de función exponencial

4 Funciones exponencial y logarítmica

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

La condición establecida sobre la base ($a > 0$ y $a \neq 1$) hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor; por lo tanto, el dominio de la función es IR y su rango IR⁺ =]0; +∞[.

El que la base sea mayor o menor que 1 va a condicionar que la función sea creciente o decreciente. En los casos de base mayor que 1, cuando mayor sea la base, más rápido será el crecimiento de la función.

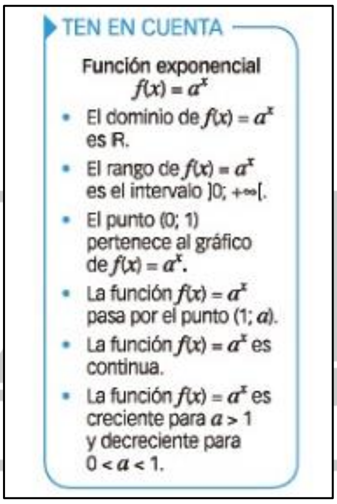
Fuente: Santillana (2020, p. 77)

13 Debido al contexto que atraviesa la educación peruana, el estado peruano estableció brindar a los estudiantes fichas de autoaprendizaje con la finalidad de generar mayor desenvolvimiento de parte de ellos en la construcción de sus conocimientos

Tal definición es presentada como lo es comúnmente en la sociedad matemática dentro de la enseñanza de educación básica: expresión algebraica de la función exponencial y explicación breve sobre las características de la base.

- En el mismo libro, acompañando a su definición, se menciona características y/o propiedades formales de la función exponencial como se observa en la Figura 22.

Figura 22. Características y/o propiedades formales de la función exponencial

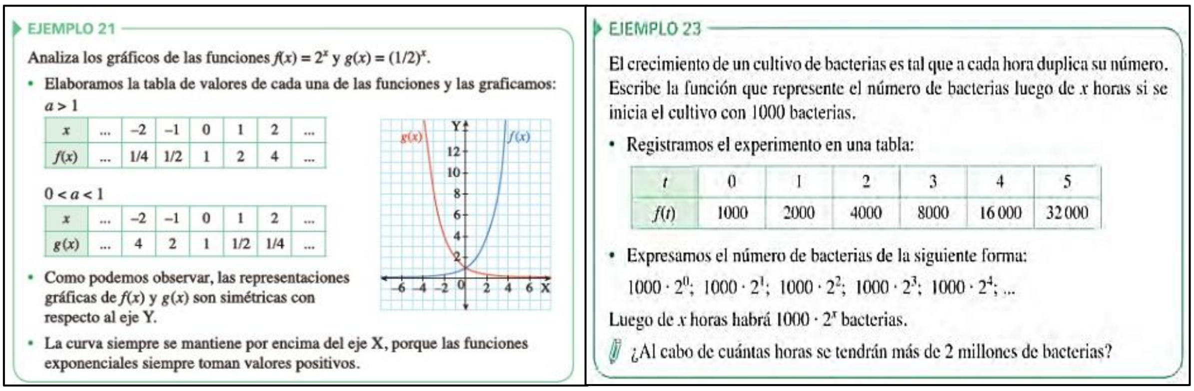


Fuente: Santillana (2020, p. 77)

- Posterior a ello, el libro desarrolla un ejercicio con un contexto intra matemático y extra matemático[14], en los ejemplos 21 y 23 respectivamente que presenta el libro (ver figura 23). En primer lugar, en la descripción del ejemplo 21, se presenta dos funciones exponenciales con sus respectivas gráficas y tabla de valores con la finalidad que los lectores observen la diferencia entre una y otra cuando la base de la función se encuentre entre 0 y 1 y cuando la base sea mayor que 1. El propósito del ejemplo se sobre entiende que es para poner en escena las características de la función exponencial, sin embargo, presuponen que los estudiantes conocen aquellos nuevos términos no mencionados con anterioridad: funciones simétricas, orientación de la función cuando x toma valores negativos

Figura 23. Ejemplos iniciales para el estudio de la función exponencial

[14] Pueden ver los trabajos de Malaspina y Vallejo (2015) https://core.ac.uk/download/pdf/328834474.pdf



EJEMPLO 21

Analiza los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (1/2)^x$.

- Elaboramos la tabla de valores de cada una de las funciones y las graficamos:

$a > 1$

x	...	–2	–1	0	1	2	...
$f(x)$	...	1/4	1/2	1	2	4	...

$0 < a < 1$

x	...	–2	–1	0	1	2	...
$g(x)$	...	4	2	1	1/2	1/4	...

- Como podemos observar, las representaciones gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas con respecto al eje Y.
- La curva siempre se mantiene por encima del eje X, porque las funciones exponenciales siempre toman valores positivos.

EJEMPLO 23

El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora duplica su número. Escribe la función que represente el número de bacterias luego de x horas si se inicia el cultivo con 1000 bacterias.

- Registramos el experimento en una tabla:

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	1000	2000	4000	8000	16 000	32 000

- Expresamos el número de bacterias de la siguiente forma:

$1000 \cdot 2^0$; $1000 \cdot 2^1$; $1000 \cdot 2^2$; $1000 \cdot 2^3$; $1000 \cdot 2^4$; ...

Luego de x horas habrá $1000 \cdot 2^x$ bacterias.

¿Al cabo de cuántas horas se tendrán más de 2 millones de bacterias?

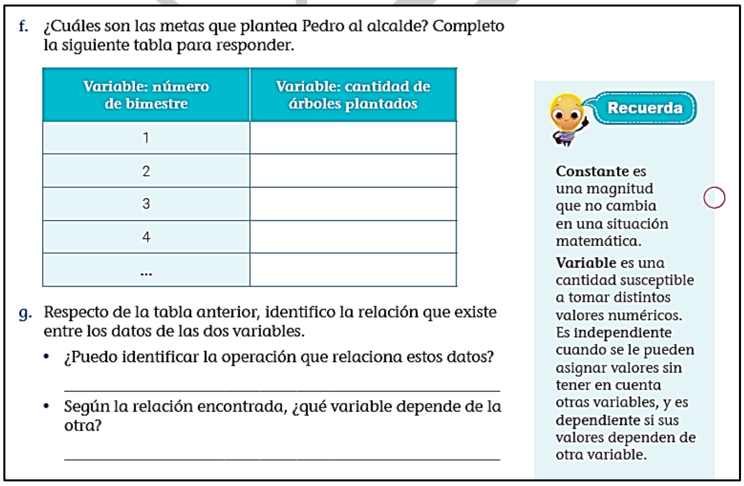
Fuente. Santillana (2020, p. 78)

Asimismo, con referencia al ejemplo 23, si bien se presenta un contexto con relación al tema de estudio, pero en ningún momento presenta un requerimiento al estudiante para que puedan graficar dicho contexto. Claro está que por un método inductivo los estudiantes pueden determinar las respuestas, pero no podrían tener una idea clara de modelar una función con la posibilidad de realizar conjeturas con dicho modelo.

Ahora bien, dicho material didáctico será complementado con unas fichas de autoaprendizaje realizado por la MINEDU (2020)[15], lo cual destacamos lo siguiente:

- El estudio de la función exponencial es presentado a través de una situación contexto (o de contexto extra matemático) considerando como conocimientos previos los conceptos de constante, variable dependiente e independiente. Tal como se muestra en la figura 24

Figura 24. Conceptos previos a función exponencial



f. ¿Cuáles son las metas que plantea Pedro al alcalde? Completo la siguiente tabla para responder.

Variable: número de bimestre	Variable: cantidad de árboles plantados
1	
2	
3	
4	
...	

g. Respecto de la tabla anterior, identifico la relación que existe entre los datos de las dos variables.

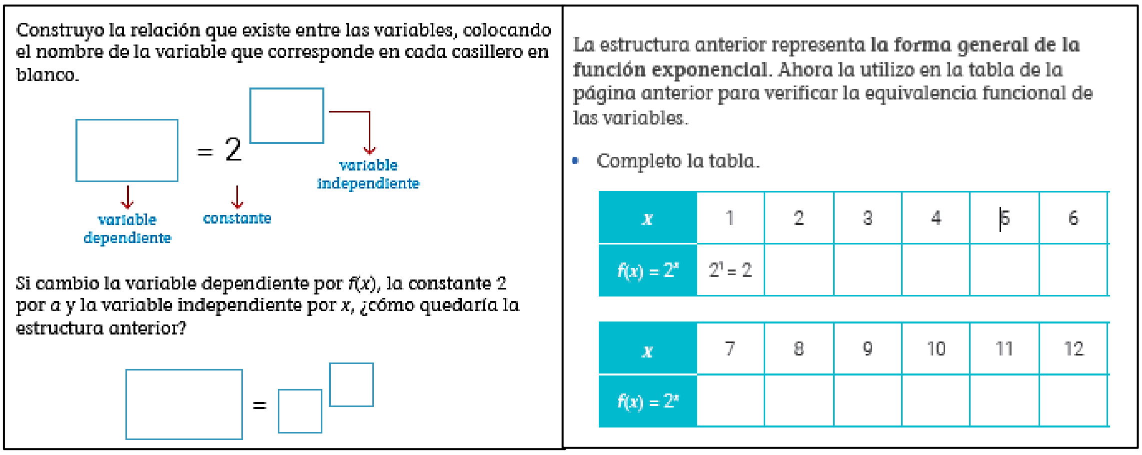
- ¿Puedo identificar la operación que relaciona estos datos?
- Según la relación encontrada, ¿qué variable depende de la otra?

Fuente. MINEDU (2020, p. 50)

[15] Ver Minedu (2020). Matemática 5. https://drive.google.com/file/d/1ARNzhHakv4-tNginCRdQmMJOy9dH_TTO/view. Asimismo se escogió dicho complemento debido a que el cuaderno de trabajo *Resolvamos problemas 5* no consideran el tema de función exponencial en sus actividades

- En los siguientes ejercicios, ya habiendo establecidos los conceptos de variables dependientes e independientes, se establece la relación entre ellas (ver figura 25) de manera que en ella se formen una función, que, por conveniencia, se forma la función exponencial con base 2. Al ser un complemento del libro escolar principal, no se considera las características propias de la función exponencial como se presenta en el primer libro mencionado.

Figura 25. Conceptualización de la función exponencial


Construyo la relación que existe entre las variables, colocando el nombre de la variable que corresponde en cada casillero en blanco.

Si cambio la variable dependiente por $f(x)$, la constante 2 por a y la variable independiente por x, ¿cómo quedaría la estructura anterior?

La estructura anterior representa **la forma general de la función exponencial**. Ahora la utilizo en la tabla de la página anterior para verificar la equivalencia funcional de las variables.

- Completo la tabla.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x) = 2^x$	$2^1 = 2$					

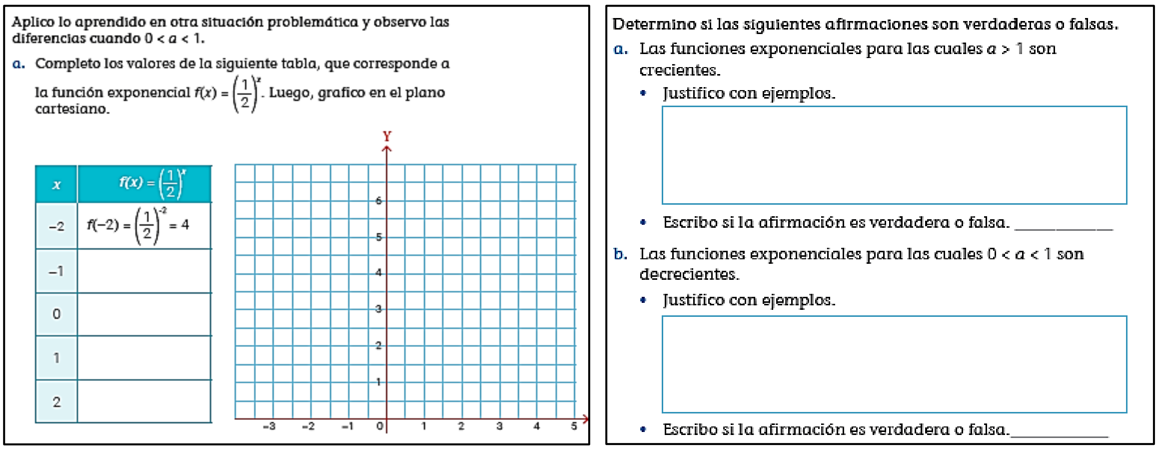
x	7	8	9	10	11	12
$f(x) = 2^x$						

Fuente. MINEDU (2020, p. 50)

Sin embargo, a diferencia del primer libro en este enfatiza diferentes tipos de representación en el estudio de la función exponencial: representación simbólica o algebraica, representación tabular y representación gráfica

- Por último, con relación a lo mencionado anteriormente, el libro otorga ejercicios para reforzar la característica principal de la base de la función exponencial, la relación de la gráfica con los ejes del plano cartesiano y la orientación de dicha función de ser crecientes o decrecientes tal como se muestra en la figura 26.

Figura 26. Ejercicios de razonamiento y justificación de función exponencial


Aplico lo aprendido en otra situación problemática y observo las diferencias cuando $0 < a < 1$.

a. Completo los valores de la siguiente tabla, que corresponde a la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Luego, grafico en el plano cartesiano.

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
−1	
0	
1	
2	

Determino si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. Las funciones exponenciales para las cuales $a > 1$ son crecientes.
- Justifico con ejemplos.
- Escribo si la afirmación es verdadera o falsa. ___________

b. Las funciones exponenciales para las cuales $0 < a < 1$ son decrecientes.
- Justifico con ejemplos.
- Escribo si la afirmación es verdadera o falsa.___________

Fuente: MINEDU (2020, pp. 53-54)

Entonces, comprendemos que las características formales propias de la función exponencial se encuentran descritas en el libro principal de Matemática 5 de la editorial Santillana (2020), mientras que en el material complementario de la MINEDU (2020) podemos profundizar la construcción y ejecución de la función exponencial. Con todo ello, podemos tener como referencia un primer concepto base sobre el objeto de estudio: la función exponencial se establece de la forma $f(x) = a^x$ donde la base a tiene que ser mayor que 0 y distinto que 1; y, el exponente x, puede tomar cualquier valor de manera que su dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el rango es $\mathbb{R}^+$. Estas características visualizadas en los libros encaminarán el desarrollo del estudio al determinar las actividades para la comprensión de la función exponencial mediante el uso del software GeoGebra.

b. SEGUNDA FASE: La concepción y el análisis a priori

La segunda fase está determinada por la toma de decisiones del propio investigador para escoger un determinado número de variables pertinentes y relacionados al problema de investigación. En nuestro caso, se determinará aquellas variables con relación a la actuación de los estudiantes involucrados en la investigación de acuerdo con la definición realizada por Artigue (1995), que considera dos tipos de variables:

Variables *macro-didácticas o globales*, se relacionan directamente con la organización global y la gestión del medio. Estas variables seleccionadas son globales ya que parte del primer análisis de restricciones realizado (cuando se mencionó sobre las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica. Por tanto, con relación al estudio, no se tomará decisión en la elección de aquellas variables globales puesto que ya se presenta de manera más explicitas en las variables microdidácticas por el efecto didáctico que estas ofrecen y que serán corroborado más adelante durante el análisis a priori y el análisis a posteriori. Para ejemplificar algunas posibles variables globales, Artigue resalta lo siguiente:

> Las variables globales pueden estar ligada a decisiones como recurrir a las herramientas informáticas, desarrollar los prerrequisitos adaptados al nivel de la función, limitar la complejidad al nivel de la resolución algebraica, transformar el trabajo en actividades autónomas de la parte algoritmizada de esta resolución, y enseñar explícitamente métodos para el estudio cualitativo. (p.43).

Variables *micro-didácticas/locales*, se relacionada directamente con la organización local de la ingeniería, determinada por el contenido didáctico dentro de la enseñanza, es decir, ligadas con la organización del medio didáctico y el diseño de la situación didáctica (Brousseau, 1997). Por tanto, en la presente investigación utilizamos variables micro-didácticas adecuándose al tipo de artefacto investigado debido a que se ha establecido una secuencia de actividades para el aprendizaje de la función exponencial mediado por el software GeoGebra. Además, estas son de carácter más específica, dirigida directamente al contenido y actividades del tema, lo cual, a la vez, dependió de la complejidad de los fenómenos presentados en el entorno de clases virtual para su realización. En la Tabla 16 se muestra las variables micro-didácticas de acuerdo al tipo de artefacto

Tabla 16. Variables micro didácticas de acuerdo con el artefacto

Variables respecto a la instrumentalización del GeoGebra
Los diversos comandos presentes en las barras de herramientas y menú
Los aspectos de ventana que presenta el programa: aspecto gráfico, algebraico, Excel, etc.
La barra de entrada en la ventana algebraica y el uso del arrastre con el comando zoom y el mismo mouse
El tipo de comando para realizar trazos, intersecciones y gráficos de funciones
Variables respecto a la génesis instrumental de la función exponencial
Gráficos de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$
Gráficos de la función exponencial con desplazamientos verticales y horizontales
Las diversas expresiones que conforma la asíntota horizontal en las funciones exponencial

A partir del cuadro establecido se resume las variables previstas para las actividades previstas en el estudio de la función exponencial.

Respecto al análisis a priori, Artigue (1995) define lo siguiente:

> el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (p.45).

Por la tanto, el análisis a priori se compone en dos partes: una predice y otra que describe acorde a lo que se espera con las respuestas de los estudiantes involucrados en el estudio. En este sentido, se llevará un control de la acción de los estudiantes durante el desarrollo de la situación didáctica, los comportamientos esperados y las acciones fuertes de los mismos y los conocimientos previos que pueden poseer (dentro de un medio y contrato didáctico[16] establecidos para el desarrollo de la situación) cuando entren en contacto con el software matemático GeoGebra.

c) TERCERA FASE: Experimentación

En esta tercera parte, penúltima de la metodología de Ingeniería Didáctica, se manifiesta el contacto entre el docente investigador, los sujetos objeto de la investigación y los instrumentos a ser aplicados durante el contrato didáctico (roles y obligaciones de los participantes). Con ello, se entiende que se aplican los instrumentos diseñados o adaptados por el investigador junto a las producciones de los estudiantes y ciertos registros de observación durante la experiencia, los cuales recogen un conjunto de datos que serán corroborados posteriormente con las hipótesis implantadas en la última fase, el análisis a posterior. Con relación a la investigación, durante esta fase se aplicarán los instrumentos establecidos en la Tabla 17 y se realizarán las observaciones de todos los encuentros a partir de las reuniones Zoom y los registros guardados dentro del GeoGebra Classroom.

---

[16] Con estos términos se puede establecer otra característica principal de la Ingeniería Didáctica el cual toma ciertos elementos de la TSDM (Teoría de Situaciones Didácticas) planteado por Brosseau.

Tabla 17. Descripción de los instrumentos (ítems), encuentros, contenido didáctico y clases creadas en GeoGebra Classroom para la secuencia de aprendizaje

Artefacto	Instrumento	Ítems	Contenido didáctico	GeoGebra Classroom
Software GeoGebra		I, II, III*	Prueba de diagnóstico	-
	0	I, II, III*	Primeros usos de las barras herramientas y las barras de entrada del GeoGebra	-
	1	a,b,c y d	Gráfica de función lineal	Clase 1
	2	a,y b	Gráfica de función cuadrática	
	3	a,b,c y d	Intersección de gráficas	Clase 2
	4	a,b	Construcción de gráficas limitadas por un intervalo	
	5	a,b,c, d, e y f	Dominio y rango de función	
Función Exponencial	**6**	a,b,c, d, e	Introducción a la función exponencial	Clase 3
	7	a,b,c, d, e y f	Función exponencial en su forma $f(x) = b^x$	Clase 4
	8	a,b,c, d, e y f	Asíntotas horizontales	
	9	a,b,c, d, a1,b1,c1 y d1	Desplazamientos vertical y horizontal en función exponencial	Clase 5

* Representa que el instrumento está dividido en partes. Parte I, II y III

Aquí se especifica que para la secuencia de aprendizaje se hará uso de 9 instrumentos directos para la enseñanza de la función exponencial. Así como dos iniciales uno referido a la prueba diagnóstico para determinar los conocimientos previos de los participantes y otro referido a una clase guía del uso del programa GeoGebra.

d) CUARTA FASE: *Análisis a posteriori* y validación

La cuarta y última fase esta centrado en un análisis a posteriori y su correspondiente validación de la misma. Desde la perspectiva de la autora, Artigue (1995) nos menciona:

> El análisis a posteriori se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (p.48)

Entonces, con relación a la investigación, ya habiendo recolectado y organizado los datos obtenidos en la fase de experimentación, se realizará un contraste entre el análisis a priori y los resultados con el fin de validar las hipótesis [17]consideradas antes del desarrollo de la secuencia de aprendizaje. Finalmente, posterior a la validación, se fijarán aspectos no alcanzados a manera de dejar cuestiones abiertas para futuras micro o macro ingenierías didácticas.

[17] Consideramos las siguientes: La secuencia de aprendizaje mediada por el GeoGebra garantiza el aprendizaje de la función exponencial. Asimismo, dicha secuencia de aprendizaje evidenciará los esquemas de utilización de los estudiantes y generará nuevos esquemas de acción instrumentada propia y colectiva

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS

En el presente capítulo se describirán el escenario de la investigación, los sujetos de la investigación, así como también cada una de las actividades propuestas junto a su explicación y análisis a priori y a posteriori de estas desde el Enfoque Instrumental y la Ingeniería Didáctica.

5.1 Escenario de la investigación

A raíz de la pandemia originada por el virus SARS-Cov-2, la realización de las actividades propuestas pasó a ser de manera virtual, utilizando como escenario una sala con los recursos tecnológicos necesarios: computadora y celular con conexión a internet, aplicación de videollamada (usando el programa Zoom Meetings), GeoGebra Classroom, pizarra virtual, plantillas PPT e impresora. Al mismo tiempo, los estudiantes se encuentran en un espacio adecuado dentro de su hogar para que puedan responder las actividades en conexión a la videollamada realizada en los encuentros establecidos, y durante el momento, si en caso hubiese consulta por parte de ellos, estas fueron respondidas por el mismo entorno de la videollamada verbalmente y/o haciendo uso de una pizarra virtual o el propio GeoGebra Classroom en caso sea necesario.

5.2 Selección y características de los sujetos de la investigación

La selección de los sujetos de investigación fue de manera voluntaria luego de un comunicado escrito en una sesión de clase general del área de Matemática. En dicho comunicado se informó a los estudiantes el horario de los encuentros, la intención de aprender nuevos conocimientos usando un programa en línea y los requisitos que deben cumplir para llevar a cabo una adecuada aplicación de los instrumentos. Además, en un inicio se informó la cantidad máxima permitida de estudiantes por sección (la institución contaba con cuatro secciones) que eran de 4 estudiantes. Así, se empezó con un total de nueve estudiantes de todas las secciones, sin embargo, por factores personales e internos de los participantes solamente pudieron continuar seis estudiantes.

De esta forma, en la investigación participaron seis estudiantes que se encuentran cursando el quinto grado de secundaria de una institución pública de Educación Básica Regular, organizados en dos equipos de tres estudiantes, a estos equipos se les denominaron con las siguientes etiquetas: Equipo 1 y Equipo 2. Los estudiantes trabajaron en equipo en sus propias computadoras, de manera colaborativa y sincrónica, con ayuda de la opción que permite la aplicación Zoom Meetings en la creación de salas de grupos pequeños. Asimismo, se observará cada uno de sus aportes y avances en equipo en el documento Drive que se compartirán a cada integrante (un archivo por cada equipo) y en el GeoGebra Classroom.

De acuerdo con el contexto que atraviesa el mundo de la pandemia, se prestó mayor atención al horario disponible de los participantes por muchos factores presentados dentro de la virtualidad, como, por ejemplo: cruce con actividades extracurriculares, contaba con una sola computadora o laptop que es utilizada por todos los miembros familiares, fallas en la conexión de internet y/o cortes de luz no programados y reforzamiento de clases de sus cursos escolares. Por tanto, los estudiantes de estos equipos participaron en seis encuentros. Por un lado, el primer encuentro se fijó para una evaluación diagnóstica con la finalidad de observar y determinar los esquemas de uso (conocimientos previos) de los participantes involucrados en las nociones previas a la introducción de la función exponencial. Además, se consideró algunas de las competencias declaradas en la dimensión cognitiva del análisis preliminar de la ingeniería didáctica en el capítulo anterior. El diseño de la prueba diagnóstica siguió la siguiente secuencia tal como se muestra en la Tabla 18:

Tabla 18. Secuencia de contenidos de la prueba diagnóstica aplicada

PARTES	Aspectos	Conocimientos Previos	PARTE I	PARTE II	PARTE III
PARTE I	**Sobre objetos matemáticos previos**	• Ley de exponentes • Progresión aritmética y geométrica • Interés simple y compuesto	**Preguntas del N° 1 al N°3**		

PARTE II	**Sobre el concepto de función**	• Dominio, rango e intersecciones • Representación gráfica de una función • Función creciente y decreciente • Proceso de dilatación y traslación de funciones	**Preguntas 4, 5, 6, 7, 8 y 9**
PARTE III	**Modelizar funciones en situaciones reales**	• Situación relacionada la función lineal y otra la función exponencial	**Pregunta N° 10**

Por otro lado, los cinco encuentros restantes están centrados en el desenvolvimiento de los estudiantes con la secuencia de aprendizaje de la función exponencial mediado por el GeoGebra. La secuencia de aprendizaje está diseñada por diversas actividades los cuales son desarrolladas en cada encuentro un conjunto de actividades de manera secuencial, tal como se aprecia en la Tabla 19.

Tabla 19. Descripción de encuentros y actividades aplicados

Actividad	Encuentro	Contenido
Actividad N° 0	II	Introducción al GeoGebra
Actividades N° 1, 2 y 3	III	Introducción a las funciones
Actividades N° 4, 5 y 6	IV	Gráfica de funciones e introducción a la función exponencial
Actividades N° 7 y 8	V	Función exponencial, propiedades y asíntota
Actividades N° 9	VI	Desplazamiento y traslación de la función exponencial

Para ello, las actividades son diseñadas dentro del applet del GeoGebra online, en una sesión sincrónica vía Zoom Meetings y con evidencias guardadas dentro del GeoGebra Classroom, grabaciones de las videollamadas y documentos compartidos por Google Drive. En todo ello, se consideró el perfil de los estudiantes de quinto grado en las actividades diseñadas y los conocimientos previos de los mismos que fueron adquiridos dentro de las sesiones regulares de clases en el área de Matemática.

5.3 Descripción de la secuencia de aprendizaje

Para la experimentación del estudio, se propone una secuencia didáctica con diez actividades que tiene por nombre "Estudiamos la función exponencial a través del software GeoGebra", pero cada actividad también busca interiorizar las propiedades de cada artefacto Software GeoGebra y Función exponencial. Esto se puede evidenciar mejor en la Tabla 20.

Tabla 20. Lista de actividades y propiedades estimados de los artefactos en la investigación.

ACTIVIDADES	
N°	**Temática de la actividad**
0	Introducción al GeoGebra
1	Analizar la gráfica de una función lineal en la vista gráfica del GeoGebra (regla de correspondencia, pendiente, pares ordenados) indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados.
2	Analizar la gráfica de una función cuadrática en la *vista gráfica* del GeoGebra indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados, regla de correspondencia, vértice, dominio y rango, etc.)
3	Escribir funciones lineales y cuadráticas con ciertas características y formar nuevas reglas de correspondencia de las nuevas funciones, moviendo un punto (par ordenado) en particular.
4	Analizar la construcción de las gráficas de funciones creadas por una lista de puntos
5	Determinar el dominio y rango de dos funciones comprendidas en un intervalo

6	Introducir el contenido de función exponencial a partir del estudio de las progresiones geométricas y la fórmula de capital con interés compuesto
7	Interpretar la expresión de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$
8	Determinar la función de la asíntota horizontal en las funciones exponenciales
9	Interpretar el desplazamiento vertical y horizontal de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x \pm k$ y $f(x) = b^{x \pm h}$, respectivamente al variar los parámetros k y h

Artefacto	**Propiedades estimadas en los artefactos**	**Actividades**								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Software GeoGebra	La barra de herramientas	x	x	x				x	x	
	La barra de entrada	x	x			x		x	x	x
	La vista algebraica	x		x	x	x				x
	La vista hoja de cálculo				x		x			
	La vista gráfica	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Arrastre de un objeto geométrico					x	x			x
	Deslizador			x			x	x	x	x
Función Exponencial	Comando función	x					x			
	Concepto de función	x				x	x			
	El dominio							x		
	El rango							x		x
	Regla de correspondencia		x			x	x	x		
	Representación gráfica						x	x	x	
	Asíntota								x	
	Desplazamiento horizontal									x
	Desplazamiento vertical									x

Fuente: Adaptado de Chumpitaz, 2014

Las nueve actividades instrumentadas son entregadas vía Google Drive a cada integrante del equipo como una ficha de trabajo con el termino Actividad. Cada actividad contiene ítems que se encuentran distribuidos tal como se presentó en la Tabla N°18. Asimismo, cada actividad viene acompañado por la construcción de un applet, donde el archivo de extensión es del formato de GeoGebra (*.ggb*) las cuales deben usar para responder cada uno de los ítems establecidos en la secuencia de aprendizaje. La característica de cada actividad varía dependiendo del objetivo que se busca, por ende, en los formatos *ggb* se pueden presentar distintas características como: activación/desactivación

5.4 Procedimiento de la aplicación

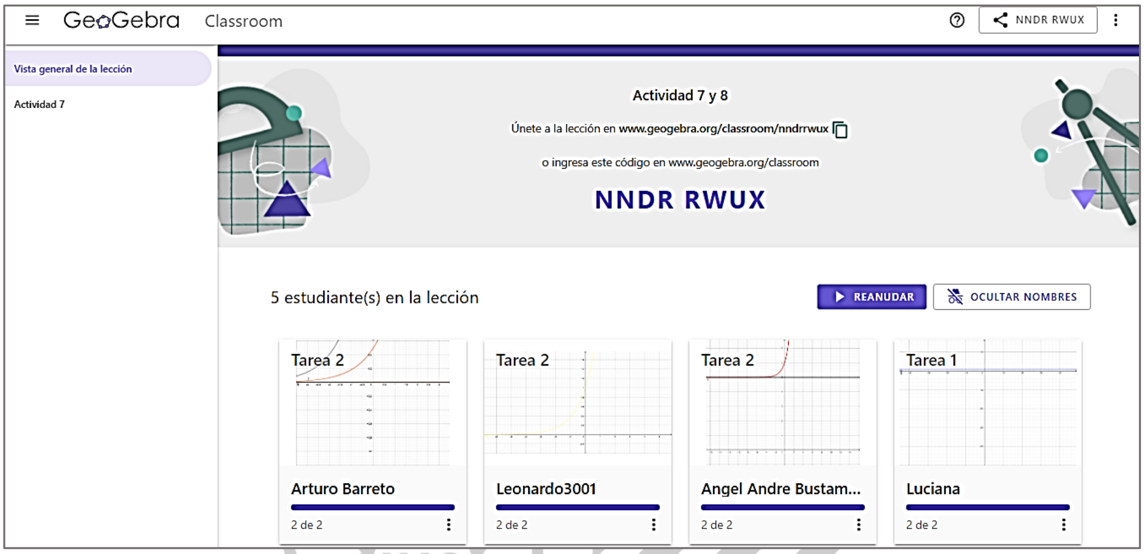
En los puntos 5.2 y 5.3 se han detallado grosso modo parte del procedimiento con las aplicaciones que se usaran en la metodología de manera virtual. Ahora bien, en este apartado se comentará a mayor detalle el procedimiento llevado a cabo durante la experimentación, el cual fue desarrollado de manera virtual. Por tal motivo, fue necesario que los participantes estén equipados de una buena conexión a internet, una laptop o computadora, audífono con micrófono incorporado y el ambiente propicio para la buena comunicación de las indicaciones durante los encuentros. Con todo previamente equipado, los participantes debían tener listo las siguientes aplicaciones (usadas durante todo el experimento):

1. Zoom Desktop Versión 5.8.3 (con opción a crear pequeñas salas)
2. Cuenta de correo Gmail
3. Google Drive
4. GeoGebra Classic Web
5. OBS Studio (para el investigador)

La fase de experimentación se llevó a cabo en 6 sesiones de aprendizaje con una duración alrededor de 90 a 120 minutos, considerando minutos iniciales de explicación del tema y las actividades a desarrollar los estudiantes en grupo. En esta secuencia de aprendizaje, los estudiantes por medio del GeoGebra aprenderán sobre la función exponencial a partir de sus respuestas dadas en las diez actividades de la secuencia presentada en una ficha de trabajo. Esta ficha de trabajo (formato docx.) es compartida minutos antes de la sesión en cada encuentro por medio del Google Drive, el cual los estudiantes trabajarán juntos de forma sincrónica dentro de Documentos pertenecientes al Google Drive. Cabe resaltar que cada estudiante manejaba un correo Gmail personal o un correo institucional con dominio en Gmail. Además, cada ítem incluido en cada una de las actividades es resuelta independientemente por cada estudiante en GeoGebra

Classroom[18] (ver figura 27), previamente construida por el investigador dentro de su propio perfil para crear las clases. Para ello, en el primer encuentro, más allá de desarrollar la prueba de diagnóstico, los estudiantes se crearon una cuenta en GeoGebra (como rol de estudiante) con la finalidad que puedan interactuar en el espacio creado.

Figura 27. Interfaz de una clase creada en GeoGebra Classroom – Actividad 7 y 8 y evidencias de algunos de los participantes



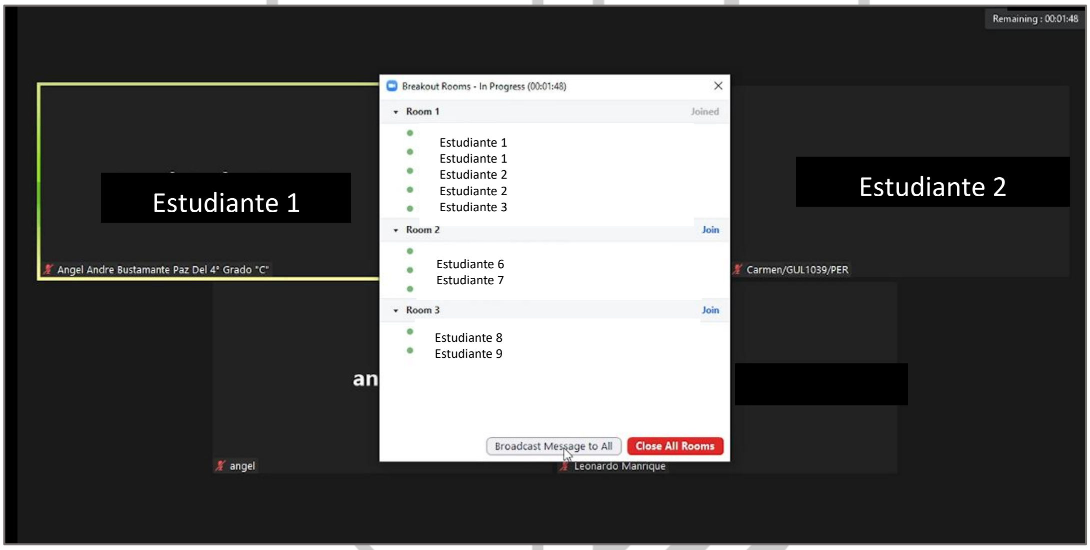
En la primera etapa del trabajo en conjunto usando las aplicaciones ya mencionadas (Google Drive y la opción de GeoGebra Classroom) el investigador da pautas del trabajo colaborativo en forma sincrónica con la aplicación Zoom como el medio de comunicación entre los equipos. Asimismo, establecen el contrato didáctico para todas las sesiones de aprendizajes[19] y brinda espacio para que cada integrante pueda interactuar con su equipo. A continuación, el investigador presentó la Actividad 0 presentando el GeoGebra y describiendo aspectos generales de su interfaz.

En la segunda etapa de la experimentación, los encuentros son dados a partir del trabajo en equipo en el archivo compartido por Google Drive, donde deben registrar sus datos generales y leer las indicaciones de cada actividad que se encuentra en la parte inicial de cada ficha. Inmediatamente, el investigador envía en cada encuentro el espacio creado en GeoGebra Classroom con las actividades a desarrollarse. Cada clase creada en

[18] El uso de GeoGebra Classroom fue de mucha importancia dentro de la experimentación en el monitoreo de las actividades y evidencias de los estudiantes ya que en este contexto de enseñanza virtual son pocas las posibilidades de observar si claramente un estudiante avanza o no con las indicaciones.
[19] Se estableció la grabación de la reunión Zoom y de sus evidencias en GeoGebra Classroom (en algunas ocasiones) usando el programa OBS Studio.

Google Classroom puede contener una o dos actividades (como en la figura 28 donde se trabajó la actividad 7 y 8 en dicho encuentro) y es presentado por un applet[20] construido de forma online donde trabajaran cada integrante. Luego, habiendo entregado las fichas de trabajo y el espacio de GeoGebra, el investigador crea pequeñas salas dentro del programa Zoom como el espacio de interacción y trabajo en equipo de cada grupo. Finalmente, al culminar el desarrollo de cada actividad, los estudiantes enviaron en formato PDF el documento trabajado en conjunto, donde se espera los cambios y sus construcciones realizados en GeoGebra.

Figura 28. Los equipos de trabajo[21] durante la experimentación



A continuación, se presentará el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada una de las actividades de la secuencia de aprendizaje.

5.5 Análisis de las actividades

Análisis de la Actividad 1

Luego de haber presentado con el software matemático GeoGebra a través de la Actividad N° 0 (ver APÉNDICE), en esta actividad se espera que los estudiantes se familiaricen con vista gráfica y algebraica del GeoGebra, la barra de herramientas y la

---

[20] Es el interfaz del GeoGebra donde se desarrollan todas las construcciones gráficas requeridas de acuerdo a la actividad

[21] Se coloca la imagen de manera difuminada para proteger datos de los estudiantes participantes

barra de entrada a partir de las opciones gráficas de puntos, rectas y función. Para este encuentro, se realizó las actividades 1 y 2, tal como se presenta en la Figura 29 donde se creó una clase en GeoGebra Classroom para la resolución de dichas actividades.

Tabla 21. Actividad 1 de la secuencia de aprendizaje

ACTIVIDAD 1

Temática: Analizar la gráfica de una función lineal en la vista gráfica del GeoGebra (regla de correspondencia, pendiente, pares ordenados) indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

En el archivo **Actividad_1.ggb**, a través de los comandos de edición en la "Barra de Entrada" o del uso de las opciones de la "Barra de Herramientas" del GeoGebra, efectúen lo siguiente para determinar la función g definido en un intervalo especifico tal como se muestra

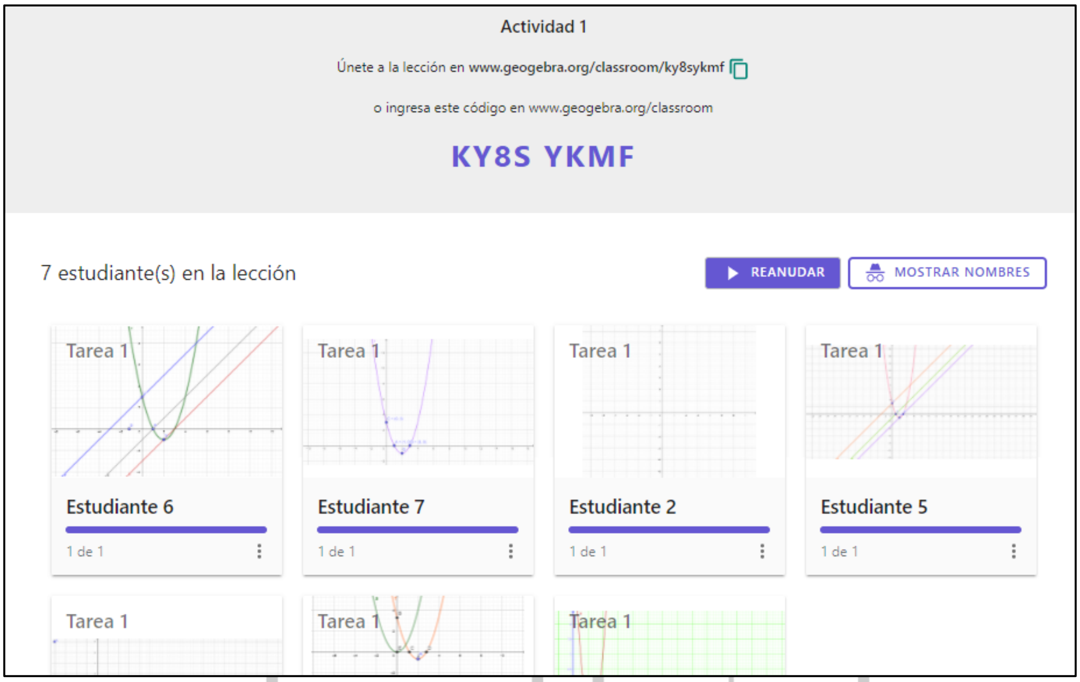
a) Abre el archivo Actividad_1.ggb del GeoGebra y grafiquen los puntos A (-4, 6) y B (4, -1)
b) Luego, grafiquen una recta que pasen por los puntos anteriores
   a. *Primer momento de redacción:* redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron

c) A continuación, creen una recta con los dos puntos y delimiten la función de la recta en un intervalo marcado por los puntos A y B con el comando de la barra de entrada **Función**(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>)
d) Por último, señalen los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados y determinen el valor de la pendiente de la recta.
   a. *Segundo momento de redacción*: redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron y comparta el gráfico obtenido y su regla de correspondencia de la forma $f(x) = ax + b,\ x \in [\ m\ ;m\ ]$

Gráfico	**Pasos que siguieron**
Regla de correspondencia de la función lineal *f(x)*	

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "*Archivo → Guardar*" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente actividad.

Figura 29. Primera clase creada en GeoGebra Classroom – Actividades 1 y 2



Ítem a)

Análisis a priori

En este ítem, los estudiantes van a representar gráficamente dos puntos (A y B) haciendo uso de la *barra de entrada* o *la barra de herramientas* con el ícono. En ella, establecerán las coordenadas A (-4, 6) y B (4, -1) dentro de la interfaz del GeoGebra.

Descripción del trabajo del equipo 1

Los estudiantes leyeron el enunciado del ítem y trabajaban en el espacio asignado en la clase creada dentro del Classroom. La organización del equipo durante la primera actividad fue de manera verbal compartiendo sus primeros procesos en la obtención de los puntos. Uno de ellos aludió que había usado solamente la opción, de forma que para graficar los puntos tuvo que agrandar la pantalla, sin embargo, no sabía porque no podía dejar de seguir colocando puntos y cambiar a la opción de selección objetos . Otro del grupo, mencionó que le parecía más exacto hacerlo digitando en la *barra de entrada* ya que le parecía complicado acertar a dichas coordenadas usando la opción *grafico de* *puntos* y es que cuando no le salía la coordenada exacta no podía mover el punto graficado con facilidad. Aún así, ambos pudieron graficar correctamente los pares ordenados. Finalmente, la tercera integrante respondió que también lo realizó usando la barra de entrada pero que encontró complicaciones cuando no le aparecía un punto, sino un vector. En ello, tuvo que recordar que se debe escribir el nombre del punto con letra mayúscula.

Análisis a posteriori

En las acciones de los integrantes del primer equipo dentro de la triada sujeto-instrumento-objeto a partir del modelo SAI (Situaciones de la actividad instrumentada) se considera los siguientes elementos que interactúan en este ítem:

Tabla 22. Gráfica de dos puntos (Modelo SAI) – Equipo 1

Modelo SAI: Gráfica de dos puntos			
N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
I	Opción *gráfica de puntos*	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano
II	Vista gráfica del GeoGebra	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano
III	Zoom	Rueda del mouse	Puntos en el plano cartesiano
IV	Barra de entrada	Clic y digitar	Puntos en el plano cartesiano

Durante el desarrollo de esta tarea se puede resumir lo siguiente: la barra de herramientas, haciendo uso de la opción *gráfica de puntos*, fue el más utilizado por los estudiantes y menor proporción (solo 1) el Zoom y la barra de entrada. En este sentido, el artefacto GeoGebra se presentó bastante comprensible para ellos, desde la teoría de Rabardel (2011) la visibilidad del software por medio de los estudiantes es transparente, de forma que es entendible para los sujetos los funcionamientos de la herramienta. También, analizando los elementos complementarios al uso de la barra de herramientas, la propiedad del zoom e intentos fallidos de arrastre pudo deberse a la configuración del objeto creado, sucede el caso que algunos sujetos creados se encuentran en objeto fijo, lo cual es propio de la acción predeterminada del GeoGebra y la acción del estudiante. Esta acción involucra tener en cuenta una propiedad del GeoGebra que emerge en la construcción del proceso gráfico de dos puntos previamente definidos. Finalmente, si bien los estudiantes no habían tenido ninguna experiencia con otro algún software matemático similar, un integrante movilizó esquemas de uso de lo que se representa unas coordenadas correctamente.

Descripción del trabajo del equipo 2

En este equipo, los estudiantes llegaron a un acuerdo en que lo más adecuado sería utilizar solamente la opción para la gráfica de A y B. Seguidamente ambos realizaron el proceso aumentando el zoom de la pantalla gráfica y ubicaron los puntos haciendo clic las coordenadas encomendadas. El proceso se usó para para la construcción de ambos puntos.

Análisis a posteriori

En las acciones de los integrantes del segundo equipo dentro de la triada sujeto-instrumento-objeto a partir del modelo SAI (Situaciones de la actividad instrumentada) se considera los siguientes elementos que interactúan en este ítem.

Tabla 23. Gráfica de dos puntos (Modelo SAI) – Equipo 2

Modelo SAI: Gráfica de dos puntos			
N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
I	Opción *gráfica de puntos*	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano
II	Vista gráfica del GeoGebra	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano
III	Zoom	Rueda del mouse	Puntos en el plano cartesiano

De las acciones de los estudiantes, solamente recurrieron al uso de la gráfica de puntos en la barra de herramientas para obtener los puntos encomendados. Además de ello, usaron la opción Zoom del GeoGebra para que su colocación sea más precisa. En este sentido, el uso de la opción Zoom, inmediatamente después del uso de la gráfica de puntos, se puede decir que el software matemático se presenta más transparente para el uso de la barra de herramienta posiblemente porque su uso (de la gráfica de puntos) es mucho más conocido porque se presenta como defecto, a simple vista, en la barra de herramientas. Por último, en este desarrollo del equipo 2 no se evidenció ninguna dificultad en la elaboración del ítem.

Ítem b)

Análisis a priori

Los estudiantes procederán a grafica una recta por los puntos previamente graficado (punto A y B) o bien activando la opción recta que se encuentra dentro de la barra de herramientas para luego seleccionar haciendo clic en dichos puntos o bien haciendo uso de la barra de entrada escribiendo el comando 

Recta(A,B) representados por ellos mismos en el applet de GeoGebra. A continuación, los estudiantes llegarían a un acuerdo en común (comentando el proceso desarrollado en equipo) y explicarían de forma precisa una secuencia de acciones en conjunto que siguieron para graficar los puntos (A, B) y la recta en la vista gráfica del GeoGebra. La mayoría de ellos argumentaron que a partir de los diversos procesos realizados para graficar los puntos A y B, pudieron graficar la recta sin ningún inconveniente activando la  opción recta en el icono denominado "recta que pasa por dos puntos" ubicado en la barra de herramientas. Esperamos que los estudiantes instrumentalicen la propiedad principal en la formación de una recta, es decir, que *una recta queda determinada perfectamente con tan solo saber las coordenadas de dos puntos cualesquiera*. Finalmente, creemos que los integrantes de cada equipo A y B movilizaron esquemas de uso como segmento, recta y formación de una recta, nociones que corresponden a conocimientos previos mencionados en la dimensión cognitiva de dicha micro ingeniería. A ello, agregamos que las herramientas del GeoGebra, presentadas hasta el momento, "se encontrarían en la fase de descubrimiento y selección pues se hallan en un proceso de familiarización" (Trouche, 2004, como se citó en León, 2014, p. 106). De manera que ambos equipos, durante la actividad, construyan un nuevo esquema de acción instrumentada con relación a la construcción de una función a partir de la creación de puntos y rectas.

Descripción del trabajo del equipo 1

Figura 30. Actividad 1-b desarrollado por el equipo 1

Luego, grafiquen una recta que pasen por los puntos anteriores

a. *Primer momento de redacción:* redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron

Primero utilizamos la barra de herramientas de la parte izquierda superior, donde escogimos la opción de Punto, colocando 2 puntos en el plano cartesiano, y luego en la parte de vista algebraica, colocamos las coordenadas correspondientes.
Para graficar una recta entre estos puntos, utilizamos la opción de recta que está en la barra de herramientas de la parte izquierda superior.

En la redacción de los estudiantes se puede observar que ellos han configurado sus esquemas de uso en la locación y caracterización de la barra de herramientas diciendo "utilizamos la barra de herramientas de la parte izquierda superior". Además de ello, menciona que "en la parte de vista algebraica", colocaron las coordenadas, pero no especificaron si fue para modificar alguna de las coordenadas de los puntos o solamente para corroborar que los puntos graficados fueron los correctos. De igual forma, sucedió con la explicación en la construcción de una recta. Estas acciones representan la familiarización de los estudiantes con el software matemático.

Análisis *a posteriori*

En las acciones de los integrantes del segundo equipo dentro de la triada sujeto-instrumento-objeto a partir del modelo SAI (Situaciones de la actividad instrumentada) se considera los siguientes elementos que interactúan en este ítem

Tabla 24. Gráfica de una recta que pasa por dos puntos (Modelo SAI) – Equipo 1

Modelo SAI: Gráfica de puntos y rectas			
N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
I	Opción *gráfica de puntos* 	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano

II	Opción *recta que pasa por dos puntos*	Clic del mouse	Recta en el plano cartesiano

Los estudiantes detallan con claridad la secuencia de sus procesos de construcción uniendo cada una de las posturas y argumentos de los integrantes. Para ello, se establecieron roles donde uno de ellos sería el encargado de escribir en el documento Word compartido por Drive mientras que los demás estudiantes van describiendo la redacción.

Descripción del trabajo del equipo 2

Figura 31. Actividad 1-b desarrollado por el equipo 2

Luego, grafiquen una recta que pasen por los puntos anteriores

a. *Primer momento de redacción:* redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron

- Primero ubicamos los dos puntos A y B en plano cartesiano, utilizando el comando , luego a través del comando graficamos una recta entre los puntos anteriores.

En la redacción de los estudiantes, se aprecia que no pudieron determinar correctamente el nombre de los comandos, por tal motivo optaron por colocar la imagen de la herramienta trabajada en sus construcciones. Aun así, los estudiantes siguieron la secuencia de los procesos de forma adecuada seleccionando los puntos A y B e hicieron la recta que una a dichos puntos.

Análisis a posteriori

Se observa que los estudiantes aún no se familiarizan con el interfaz del GeoGebra al no diferenciar los diversos comandos establecidos en la barra de herramienta, sin embargo, aún no ocurre catacresis[22]. Finalmente, se observa un alineamiento en común sobre cómo realizar el ítem.

[22] Término usado para “designar una situación donde una herramienta es usada en lugar de otra o para hacer algo que no había sido concebida”. (Rabardel, 1995).

Tabla 25. Gráfica de una recta que pasa por dos puntos (Modelo SAI) – Equipo 2

Modelo SAI: Gráfica de puntos y rectas			
N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
I	Opción *gráfica de pun*	Clic del mouse	Puntos en el plano cartesiano
II	Opción *recta que pasa por dos puntos*	Clic del mouse	Recta en el plano cartesiano

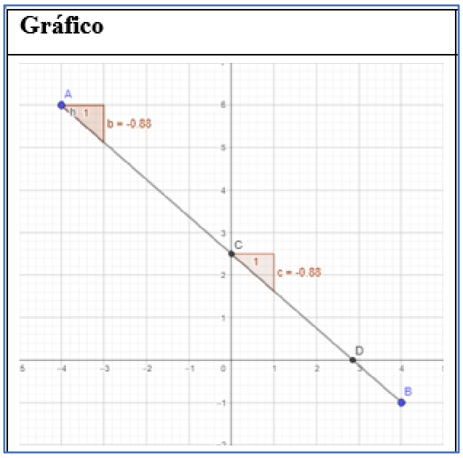
Ítem c)

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes delimitan la función de la gráfica de una recta en un intervalo marcado por los puntos A y B usando el comando de la barra de entrada Función(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>). Además, se esperó que los estudiantes instrumentalicen la propiedad que la gráfica de una recta puede ser escrita para modelar una función. Finalmente, los integrantes de cada equipo 1 y 2 siguen movilizando esquemas relacionados a la formación de una función como variable independiente, regla de correspondencia, dominio y rango, nociones que corresponden a conocimientos previos mencionados en la dimensión cognitiva de dicha micro ingeniería.

Descripción del trabajo del equipo 1

Figura 32. Actividad 1-c desarrollada por el equipo 1



Durante la realización del ítem los estudiantes acordaron como se iba a desarrollar la construcción de la función. En ello, uno de los integrantes decidió compartir su pantalla para unificar la respuesta del ítem considerando los aportes de cada uno realizado en el GeoGebra Classroom. Sin embargo, en dicha interacción solamente un integrante no tenía problemas en construir dicha función, por lo que mientras construían en equipo, dicho integrante continuamente explicaba el proceso exacto para dar respuesta al ítem. Luego de la comprensión por parte de los demás integrantes del equipo, el integrante que compartía la pantalla empezaba a redactar en la ficha de trabajo con el aporte de cada uno.

Análisis a posteriori

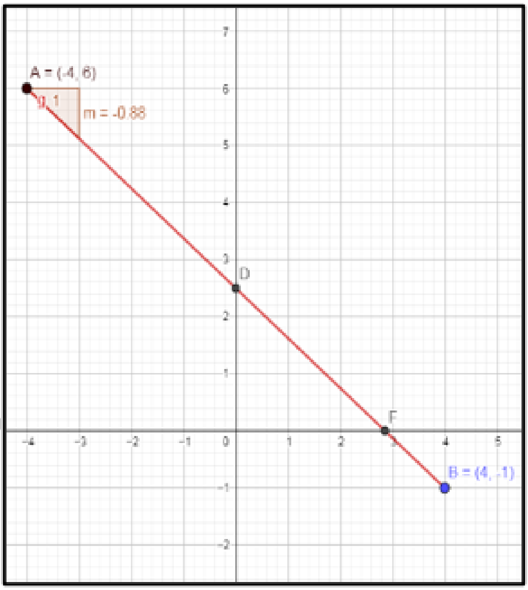
Como lo habíamos previsto en el análisis a priori, en la construcción de la función todos los integrantes movilizaron los esquemas de uso tales como pendiente e intersección de la función entre los ejes coordenados. En la Figura 33, se visualiza claramente aquellos elementos mencionados que permite que las acciones y esquemas de utilización se consideren importantes para hacer surgir las características posteriores cuando abarquemos centralmente la función exponencial. Se observó que los estudiantes realizaron la gráfica de la función usando la barra de entrada. Adecuaron sus acciones con los esquemas de usos previos cuando determinaron la función definida en un intervalo haciendo uso de los comandos del GeoGebra. Esta acción fue por descubrimiento puesto que en la Actividad 0, relacionada con la introducción al GeoGebra, no utilizó dicho comando puesto que hallar la pendiente dentro del tema de función no es usado en la enseñanza.

Tabla 26. Gráfica de una función definida por un intervalo (Modelo SAI) – Equipo 1

Modelo SAI: Gráfica de una función			
N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
I	*Barra de entrada* 	Clic del mouse y digitar el comando	Función en el plano cartesiano
II	*Pendiente* 	Clic del mouse	Pendiente en el plano cartesiano

Descripción del trabajo del equipo 2

Figura 33. Actividad 1-c desarrollada por el equipo 2



Los estudiantes leyeron el ítem de formar una función y no se presentó ninguna dificultad en torno al proceso que desarrollaron. Sin embargo, en el momento de realizar la gráfica usando la barra de entrada, se encontraron dificultades relacionadas a que no les aparecía la función en la vista gráfica del GeoGebra, asimismo que en la vista algebraica no se apreciaba la regla de correspondencia. En dicha dificultad, los estudiantes empezaron a dialogar y buscar solución a la dificultad, en ella probaron diversas formas de solución hasta que un cierto punto pudieron encontrar la solución para gráfica la función. Tal como se muestra en la Figura 33, se puede apreciar que los estudiantes también colocaron ciertas características a la función graficada: como cambiar las propiedades/características de los elementos graficados: como fue el caso de los puntos A y B donde, con el comando Etiqueta visible: Nombre y valor pudieron plasmar dentro del plano las coordenadas de los puntos.

Análisis a posteriori

En las acciones de los integrantes del segundo equipo dentro de la triada sujeto-instrumento-objeto a partir del modelo SAI (Situaciones de la actividad instrumentada) se considera los siguientes elementos que interactúan en este ítem

Tabla 27. Gráfica de una función definida por un intervalo (Modelo SAI) – Equipo 2

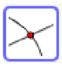
Modelo SAI: Gráfica de una función a partir de una recta			
	Instrumento	**Acción**	**Objeto**
I	*Barra de entrada* 	Clic del mouse y digitar el comando	Función en el plano cartesiano
II	*Pendiente* 	Clic del mouse	Pendiente en el plano cartesiano
III		Clic del mouse	Puntos en el plano

De acuerdo a lo previsto, se logró la representación gráfica de la función con la herramienta de la barra de entrada 

. Como se observa en las evidencias, ambos equipos graficaron el comando Función (Función, valor inicial, valor final) por lo cual no se produjo catacresis debido a que ambos estudiantes asignaron dentro de la vista algebraica la función principal a su diseño original y esto se expresa en mayor detalle en el siguiente ítem

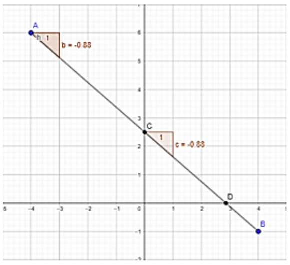
Ítem d)

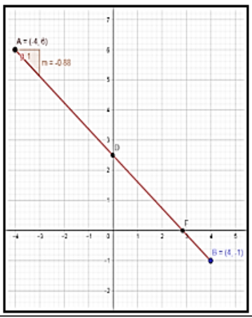
Análisis a priori

En este ítem los estudiantes identifican los puntos de intersección de la función con los ejes coordenados y determinan la regla de correspondencia de la forma $f(x) = ax + b, x \in [\, n\, ;m\,]$. Inmediatamente, redactan la secuencia de pasos que utilizaron para la identificación de los elementos pedidos en el ítem. Para ello, los estudiantes deberán validar su información con la vista algebraica y la vista gráfica del GeoGebra, pues señalarán si la regla de correspondencia verifica la gráfica de la función. Dentro de los posibles esquemas de utilización podemos encontrar: la noción de puntos de intersección de la función con los ejes, la noción de regla de correspondencia, el uso de la vista algebraica del GeoGebra y la personalización de los puntos de intersección con el comando  .

Descripción del trabajo del equipo 1 y equipo 2

Figura 34. Desarrollo de la Actividad 1-d de los equipos 1 y 2

Gráfico	Pasos que siguieron
	En la barra de entrada hablamos de escribir el comando de Función: f, x(A). x(b)) así delimitando la recta solo hasta los puntos A y B, después se buscó en las herramientas de puntos para colocar los puntos de intersección colocando 2 en el mapa cartesiano por último en la barra de entrada coloque pendiente por medio del comando pendiente(g)
Regla de correspondencia de la función lineal *f(x)*	
$h(x) = \text{Si}(x(A) \leq x \leq x(B), f(x))$ $\rightarrow -0.88\,x + 2.5, \quad (-4 \leq x \leq 4)$	

	Escribimos en la barra de entrada, función(f, x(A), x(B)) para crear una recta solo con los dos puntos, y seleccionamos el comando para seleccionar los ejes.
Regla de correspondencia de la función lineal *f(x)*	
$g(x) = \text{Si}(x(A) \leq x \leq x(B), f(x))$ $\rightarrow -0.88\,x + 2.5, \quad (-4 \leq x \leq 4)$	

En ambos equipos se desarrolló las gráficas ya descritas en el apartado anterior siguiendo el comando en la barra de entrada. En cuanto a la redacción de la secuencia de|l proceso desarrollado y de la identificación de la regla de correspondencia, muchos de ellos obtuvieron problema en la interpretación que arrojaba la vista algebraica cuando menciona $-4 \leq x \leq 4$, sin embargo, no tuvieron ninguna dificultad en identificar la función de la forma $f(x) = ax + b$. Por otora lado, tampoco tuvieron dificultad en colocar las intersecciones con los ejes X e Y puesto que ambos equipos usaron el comando “intersección”.

Análisis a posteriori para los dos equipos

En la narración de ambos equipos se comprueba dos similitudes exactas: el primero de ellos es la identificación de la regla de correspondencia dada en la vista algebraica y traspasaron tal cual aparecía a la ficha, por lo que no escribieron la regla de correspondencia a partir de sus conocimientos previos. Sobre esto, Rabardel (2011) mencionaría que esto se debe a una restricción de intencionalidad[23] en el objeto matemático expresiones algebraicas debido a que en la misma vista algebraica del GeoGebra permite a los estudiantes actuar limitadamente sobre la expresión algebraica

[23] De acuerdo con el Enfoque Instrumental las restricciones de intencionalidad refieren a la especificidad del artefacto destinado a producir transformaciones que imponen al sujeto a partir de la propia naturaleza de los objetos de la actividad sobre el/los artefactos (Rabardel, 2011)

mostrada. Es decir, la regla de correspondencia que aparece en el GeoGebra (dentro de la sección de vista algebraica) no puede ser personalizada, pero sí podría darse el caso de considerar otras formas de expresar la función si seleccionamos "Propiedades", característica que no fue usada por los estudiantes. Y lo segundo, se relaciona con que ambos equipos usaron el mismo comando para realizar las intersecciones de la función con los ejes.

Análisis de la Actividad 2

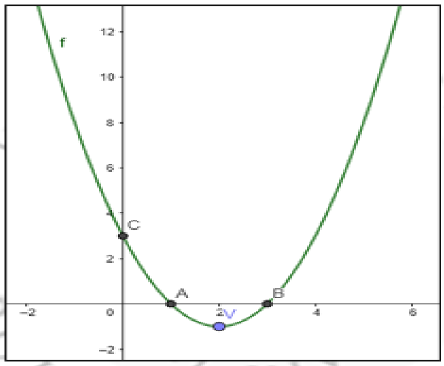
En la Tabla 26 se presenta la Actividad 2 el cual fue trabajado con los equipos en un mismo encuentro junto a la Actividad 1. En esta actividad, con relación al artefacto GeoGebra, esperamos que los estudiantes sigan perfeccionando el uso de la vista algebraica, vista gráfica, el uso de la opción intersección y la comprensión de la noción de regla de correspondencia de otras funciones. Para los resultados esperados, se trabaja inicialmente con la gráfica de una función cuadrática y posterior a ello, algunos de los ítems presentan ejercicios de reflexión y razonamiento a partir de la variación de una expresión en la vista algebraica, el cual puede influir con el cambio de posición de uno de los puntos de intersección y hasta de la misma gráfica. A continuación, se presenta el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada uno de los ítems correspondientes a dicha actividad.

Tabla 28. Actividad 2

ACTIVIDAD 2

Temática: Analizar la gráfica de una función cuadrática en la *vista gráfica* del GeoGebra indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados, regla de correspondencia, vértice, dominio y rango, etc.)

En el archivo *Actividad_2.ggb* se muestra la representación gráfica de una función cuadrática f, con vértice V y con cortes en los ejes X e Y en los puntos A, B y C respectivamente.



a) En el recuadro escriban las coordenadas del vértice y respondan que herramienta o método dentro del software GeoGebra utilizarían para determinar el vértice:

Coordenada del vértice	Herramienta o método que utilizarían

A continuación, respondan: ¿Si no existiese la barra de entrada de funciones, con que herramienta podrían graficar una parábola?

b) En el recuadro escriban la regla de correspondencia y respondan: ¿dónde cae los puntos de intersección y con qué valores? ¿con que herramienta o método lo determinaría? Expliquen sus razones

Regla de correspondencia	¿Dónde cae los puntos de intersección y con qué valores?	¿Con cuál herramienta o método lo determinarían?

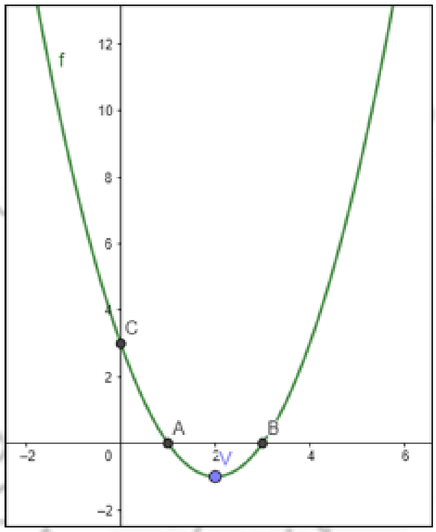
Fuente: Elaboración propia

Análisis a priori de la Actividad 2

En esta actividad, consideramos que los estudiantes del equipo 1 y 2 siguen avanzando en el proceso de instrumentalización de las propiedades del objeto matemático función, los cuales han estado determinando en sus acciones y construcciones de puntos, recta, intersección y regla de correspondencia. De manera conjunta, en un inicio, propiedades como *una función polinómica de la forma* $f(x) = ax + b$ *tiene como gráfico en un plano cartesiano a una recta, el cual podemos trazarla fácilmente encontrando dos* *puntos en el plano cartesiano. Dichos puntos forman parte de la recta y posterior a ello como parte de la función.* Dicha propiedad inicial sobre la noción de función, y todos los elementos que han construido con el GeoGebra, será enriquecido con la presentación de una nueva función, la función cuadrática. También creemos que hay rastros para suponer que el concepto de función continúa instrumentalizándose porque vincularán puntos especiales y orientación de una función (como es el caso de la función cuadrática, puntos del vértice), y que, además, la función deja de ser un artefacto abstracto para los estudiantes puesto que atribuirán dichas propiedades a la gráfica de la función exponencial (posteriormente a partir de la Actividad 5), iniciando procesos de instrumentalización.

Figura 35. Actividad 2

En el archivo *Actividad_2.ggb* se muestra la representación gráfica de una función cuadrática f, con vértice V y con cortes en los ejes X e Y en los puntos A, B y C respectivamente.



Ítem a)

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes identifican las coordenadas del vértice de la función cuadrática y deberán responder que herramienta(s) /o comando (s) dentro del software GeoGebra utilizarían para determinar el vértice. Del mismo modo, se observan si lo estudiantes identifican que la gráfica fue obtenida a partir de la barra de entrada en la vista algebraica y, al mismo tiempo, reflexionan si existiese otra forma de graficar dicha función con otro método o comando que proporciona el software. Luego de ello, escriben en la ficha la unión de cada aporte de todos los integrantes.

Descripción de ambos equipos

Figura 36. Actividad 2-a desarrollada por el equipo 1

Coordenada del vértice	Herramienta o método que utilizarían
V = (2,-1)	El método que usamos fue colocar la parábola como x^2 colocando la parábola en intersección con los puntos correspondientes A, B y C. Donde el vértice V coincidió con las coordenadas (2,-1)
La herramienta que utilizaría seria colocar en la barra de entrada x^2. Donde la colocaríamos coincidiendo con los puntos A,B y C.	

Figura 37. Actividad 2-a desarrollada por el equipo 2

Coordenada del vértice	Herramienta o método que utilizarían
(2;-1)	la herramienta de punto para poner el vértice
- Si no existiera podríamos graficarlo con el comando que dice parábola en las herramientas	

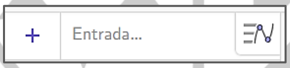
Sobre el equipo 1, los estudiantes seguían trabajando mediante el GeoGebra Classroom y compartiendo sus evidencias a partir de la opción *Compartir pantalla* que tiene el Zoom Meetings. En el proceso de interacción se observó que todos ellos trataban de determinar el vértice con el comando punto, pero entre conversaciones se apreciaba distintos valores al vértice por lo que trataron de concretar en una sola respuesta. Para ello, buscaron otra forma de encontrar precisamente las coordenadas del vértice. En ello, uno de ellos arrastró el punto graficado previamente, exactamente al lugar donde a su criterio se encontraría el vértice; mientras que los demás integrantes, buscaban nuevos comandos o alguna forma de encontrar el vértice de manera precisa. Finalmente, decidieron por una coordenada por lo que el equipo 1 se mostró seguro y decidido con lo encontrado, donde registraron la coordenada V = (2, -1).

Sobre el equipo 2, la situación de los integrantes fue menos compleja. Los estudiantes de este quipo agrandaron la vista gráfica del GeoGebra para determinar el vértice usando la opción Punto. Se observó que todos los integrantes se mostraron de acuerdo con lo obtenido, no comprobaron nuevamente y dijeron registrar la coordenada (2, -1) para el vértice de la parábola de la función cuadrática.

Análisis a posteriori para los dos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 29. Identificando las coordenadas del vértice (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Coordenadas del vértice**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	Opción *gráfica de puntos*	Clic del mouse	Punto en el plano cartesiano
	II	*Barra de entrada* 	Clic del mouse y digitar	Función cuadrática
Solo equipo 1	**I**	Opción *Punto extremo* 	Clic del mouse	Punto extremo de la gráfica cuadrática
Solo equipo 2	**I**	Zoom	Rótulo del mouse	Acercar o alejar la gráfica

De las primeras acciones de los estudiantes sobre la gráfica representada, se evidencia con relación a Rabardel (2011) restricciones de modalidades de existencia, debido a las características generales presentadas en la gráfica. Debido a la limitación de observar la regla de correspondencia establecido en el diseño de la Actividad 2 con la finalidad de orientar a los estudiantes en cumplir una tarea especifica de modo que amortigüemos dificultades con la representación 

equivocada

en las coordenadas de un punto importante en una gráfica y compruebe su representación del punto y la gráfica en la zona algebraica y barra de entrada. Ahora bien, ambos equipos consiguen la coordenada correcta del vértice de la parábola usando el comando punto extremo y comprobando en la vista algebraica. Sin embargo, sobre las acciones de algunos estudiantes podemos encontrar una diferencia. Dentro del equipo 1, un estudiante, más allá de obtener el vértice mediante la opción Punto, hizo uso de un nuevo comando, la opción Puntos extremos el cual su función radica en encontrar *la parte mayor o menor del recorrido que realiza una función polinómica* o en otras palabras con relación a la actividad, encontrar el vértice de la parábola. En este sentido, con relación a la teoría del Enfoque Instrumental diríamos de las posibilidades de acción que se ofrecen a los sujetos en el interfaz del artefacto, en esta ocasión se observó una ampliación de la

apertura del campo de los posibles ofrecida por el artefacto GeoGebra. Creemos que en dicho integrante la utilización del GeoGebra acrecentó el surgimiento de nuevas formas de acción o esquemas de acción instrumentada colectiva. De la otra pregunta que involucra el ítem a con relación a descubrir nuevas formas o herramientas de graficar la parábola sin digitar una expresión en la barra de entrada, podemos considerar lo siguiente: el equipo 1 sigue conservando la estructura de su esquema cuando menciona que *utilizaría la barra de entrada y colocaría* x^2, lo cual hace entender que conserva sus esquemas de uso y replicaría lo mismo en otras situaciones; mientras que, en el equipo 2, menciona que *utilizaría el comando Parábola* ubicada en la barra de herramientas. Si bien es cierto que en su uso pueden crear una parábola, en un intento de análisis podrían confundir el tema de parábola estudiado en secciones cónica con la forma parabólica con la función cuadrática.

Ítem b)

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes movilizarán nuevamente sus esquemas de acción instrumentada al identificar los puntos de intersección de la gráfica de función cuadrática expresada en un inicio o con una nueva gráfica creada por ellos mismos. Asimismo, deberán explicar con qué herramienta o comando podría ser evaluado. En este ítem se espera que repita su acción con el *ítem d* de la Actividad 1.

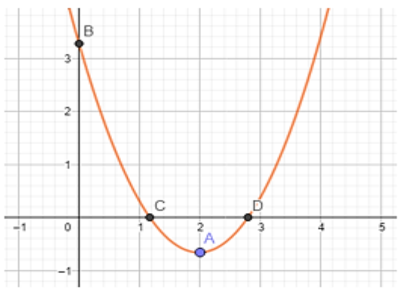
Descripción de ambos equipos

Figura 38. Actividad 2-b desarrollada por el equipo 1

Regla de correspondencia	¿Dónde cae los puntos de intersección y con qué valores?	¿Con cuál herramienta o método lo determinarían?
$f(x) = (x-2)^2 - 1$	C= (0,3) A= (1,0) B= (3,0)	Las herramientas que utilizamos para su determinación es buscar las intersecciones que coincidían, donde utilizando la herramienta de Puntos, pudimos colocar los puntos de intersección y así saber sus coordenadas.

En el desarrollo de este ítem los estudiantes conservaron la misma gráfica de la Actividad 2 el cual lo fueron representado por $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Los tres estudiantes ya habiendo identificado la regla de correspondencia de la función, solamente optaron a descubrir nuevamente los puntos de intersección con los ejes. Ahora bien, sobre la última pregunta del recuadro, se generó un debate y diálogo si podría haber otra forma de generar intersección, pero solamente se quedaron con la opción de gráfico de puntos, tal como se observa en la Figura 39.

Figura 39. Actividad 2-b desarrollada por el equipo 2

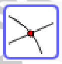
Regla de correspondencia	¿Dónde cae los puntos de intersección y con qué valores?	¿Con cuál herramienta o método lo determinarían?
$f(x) = (x-1.98)^2 - 0.66$ A = Punto(f) → (2, -0.66) B = Interseca(f, EjeY) → (0, 3.27) Interseca(f, EjeX) → C = (1.17, 0) → D = (2.8, 0)	 B = Interseca(f, EjeY) → (0, 3.27) Interseca(f, EjeX) → C = (1.17, 0) → D = (2.8, 0)	La herramienta intersecciones

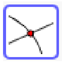
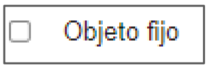
Los estudiantes optaron por desarrollar otra gráfica para responder al ítem b. Entre el diálogo generado se observa que intentaron trabajar con una nueva función arrastrando la gráfica, por tal motivo la regla de correspondencia que ellos presentan es de $f(x) = (x - 1.98)^2 - 0.66$. Luego de llegar a un acuerdo con la gráfica trabajaron juntos en su espacio de GeoGebra Classroom y empezaron a completar las partes del recuadro. De la misma manera que el equipo 1, consideraron solamente el uso del punto intersección para encontrar las intersecciones con los ejes.

Análisis a posteriori para los dos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 30. Identificando los puntos de intersección de su propia función cuadrática (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

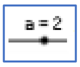
Equipo	**Modelo SAI: Intersección en función cuadrátic**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	Opción *intersección* 	Clic del mouse	Punto de intersección con los ejes
	II	*Barra de entrada*	Clic del mouse y digitar	Regla de correspondencia de la función
Solo Equipo 2	**I**	*Gráfica de nueva función*	Arrastre	Gráfico de su nueva función

Se observó que los estudiantes replicaron las mismas acciones con respecto a la función lineal de la Actividad 1. Adecuaron sus acciones rápidamente para lo pedido en el ítem 1 e identificaron sin problemas las reglas de correspondencia, esto se debe a la seguridad de seleccionar el comando  y observar el resultado en la vista algebraica del GeoGebra. Otro resultado obtenido, es la propiedad de arrastre que aplicó un integrante del Equipo 2 al arrastrar sin dificultad la gráfica de la función cuadrática inicial. Posiblemente, dicho estudiante le resultó más práctico mantener la gráfica, pero en otra posición, por ello pudo haber visto previamente la opción *Propiedades* de la gráfica para desmarcar la opción de *objeto fijo* 

de manera que pueda arrastrar sin ninguna dificultad. Con relación a los tipos de esquemas propuestos por Rabardel (1995), el estudiante estaría generando un nuevo esquema de acción colectiva instrumentada debido a las posibilidades de acción que ofrece GeoGebra a los sujetos.

Actividad 3

Análisis de la Actividad 3

En la Tabla 31 se presenta la Actividad 3 con la finalidad que los estudiantes sigan avanzando en el proceso de instrumentalización de las características de la función y, con relación al artefacto GeoGebra, esperamos que los estudiantes se inicien con la opción 

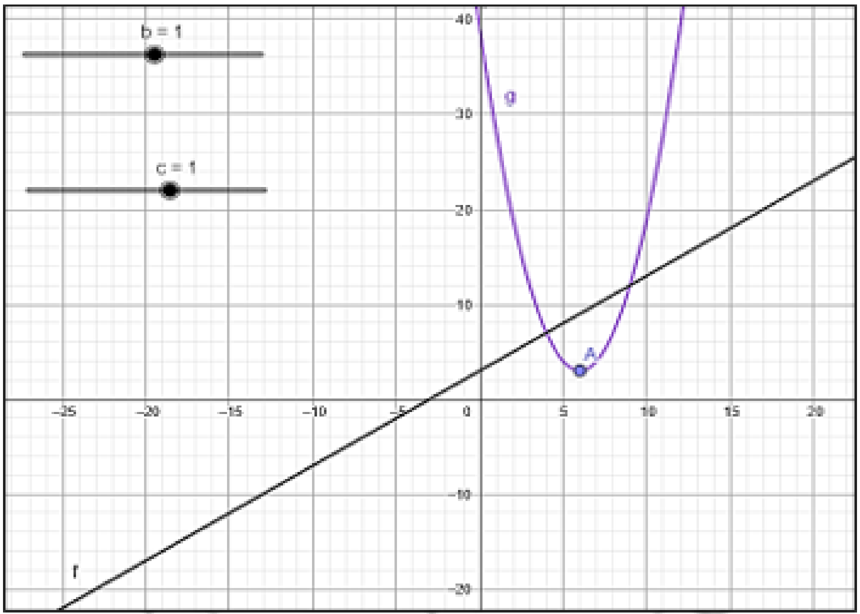
deslizador identificando la variación del valor en el deslizador y el cambio de posición de la intersección entre dos funciones lo cual genera que las reglas de correspondencia varia en la vista algebraica del GeoGebra. A continuación, elaboraremos el análisis *a priori* y *a posteriori* de cada uno de los ítems correspondientes a dicha actividad.

Tabla 31. Actividad 3

ACTIVIDAD 3

Temática: Escribir funciones lineales y cuadráticas con ciertas características y formar nuevas reglas de correspondencia de las nuevas funciones, moviendo un punto (par ordenado) en particular.

En el archivo Actividad_3.ggb de GeoGebra que abrirán a continuación, observarán dos gráficas de funciones f y g, función lineal y función cuadrática, respectivamente. Y dos deslizadores que se arrastran con el cursor del mouse, tal como se muestra en la figura



Respondan lo siguiente:

Sobre los deslizadores

a) ¿Qué determina los deslizadores b y c cuando varía su valor?

Sobre las funciones

b) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones se intercepten en dos puntos

Valores de b	Valores de c
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________

c) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones se intercepten en un solo punto

Valores de b	Valores de c
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________

d) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones no se intercepten en ningún punto

Valores de b	Valores de c
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________
b = ________	c = ________

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "Archivo > Guardar" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

Cabe añadir que para la resolución de esta Actividad 3, se realizó junto a actividades posteriores (Actividad 4 y 5) en un segundo encuentro. De igual forma, se creó una clase en GeoGebra Classroom para observar las evidencias y resolución de cada integrante, tal como se aprecia en la figura 40 donde el título de *Tarea 1* corresponde a la Actividad 3, donde su gráfica es presentada en la figura 41.

Figura 40. Clase creada en GeoGebra Classroom para el desarrollo de las Actividades 3,4 y 5

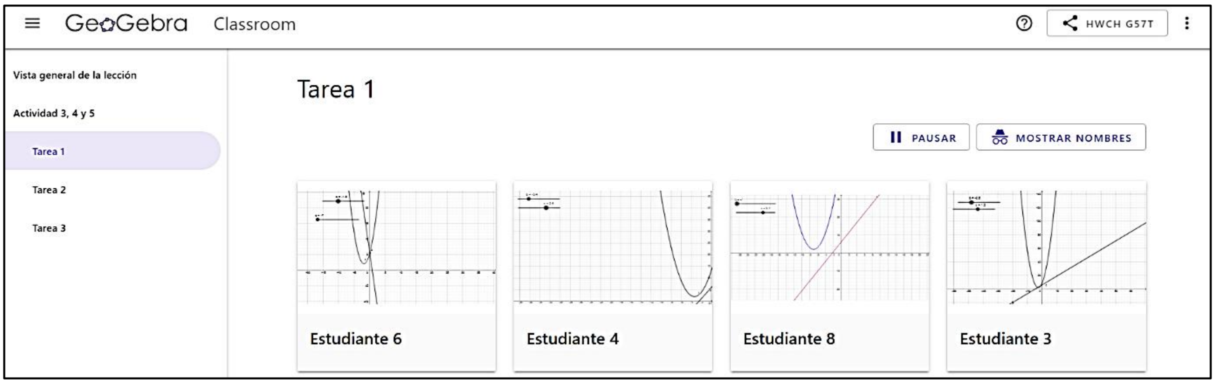
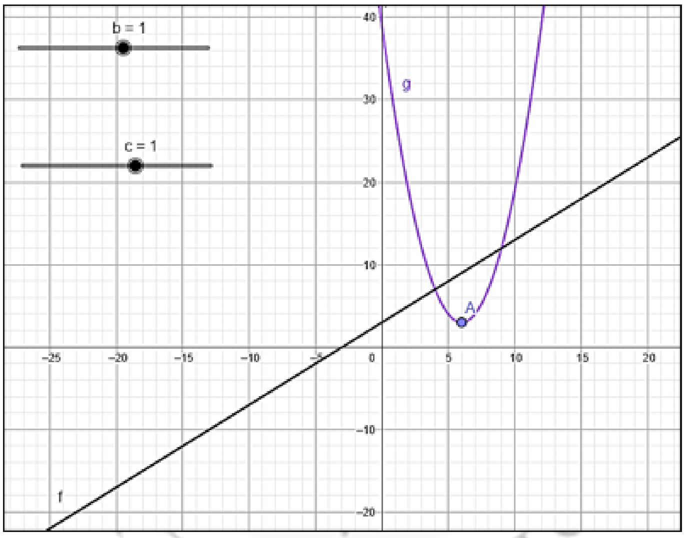


Figura 41. Actividad 3

En el archivo Actividad_3.ggb de GeoGebra que abrirán a continuación, observarán dos gráficas de funciones f y g, función lineal y función cuadrática, respectivamente. Y dos deslizadores que se arrastran con el cursor del mouse, tal como se muestra en la figura



Ítem a)

Análisis a priori

Esperamos que los estudiantes se den cuenta de la función principal del uso de deslizador involucrados en las gráficas de las funciones, observarán que pueden desplazar sobre una línea el valor de unos de los coeficientes de las funciones. A continuación, a su juicio, describen que es lo que ocurre si una expresión algebraica es afectada por un deslizador, en este caso, los deslizadores *b* y *c*.

Descripción del trabajo de los equipos 1 y 2

Figura 42. Actividad 3-a desarrollada por el equipo 1

a) ¿Qué determina los deslizadores *b y c* cuando varía su valor?

determina la posición de la función lineal y cuadrática.

Cada uno de los integrantes del equipo configuraba su conocimiento a partir de los cambios de valores que dirigía cada uno de los deslizadores. Para dar respuesta al ítem, tomaron en cuenta el movimiento que hacía de las funciones, tanto la lineal como la cuadrática. Sin embargo, no establecieron conexión con lo que sucedía con la regla de correspondencia y los interceptos entre ambas funciones.

Figura 43. Actividad 3-a desarrollada por el equipo 2

a) ¿Qué determina los deslizadores *b y c* cuando varía su valor?

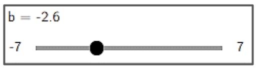
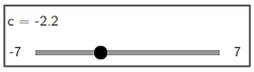
determinarian los valores de las curvas de la parabola en la grafica y tambien la recta

Para dar respuesta al ítem, los estudiantes comentaban que las gráficas se movían para la derecha y para la izquierda de acuerdo con la variación de los deslizadores. También señalaron algunos comentarios cuando los deslizadores tienden a tomar valores negativos y positivos con relación al movimiento de las funciones

Análisis a posteriori para ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 32. Identificando los puntos de intersección de su propia función cuadrática (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Movimiento de las funciones con deslizadores			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	*Deslizador de b* 	El arrastre del punto del deslizador	Coeficiente que acompaña a x^2
	II	*Deslizador de c* 	El arrastre del punto del deslizador	Coeficiente que acompaña a x

El uso del deslizador y el arrastre sobre ello se observó que estos permitieron a los dos equipos interactuar, de manera más dinámica con el software GeoGebra, con las funciones asignadas, la intersección que se genera entre ellas y la variación en su regla de correspondencia. Este arrastre se presenta de manera controlada y guiada para introducir a futuras actividades donde se hace uso de deslizadores. Con ello, se esperó que los estudiantes tomen consciencia de la acción sobre los elementos que esta variación involucra, por tanto, dicho proceso se encuentra dentro de descubrimiento progresivo los cuales van realizando los sujetos en las propiedades del artefacto lo que acompañará en la acomodación de sus esquemas.

Ítem b), c) y d)

Análisis a priori

Estos ambos ítems tienen mucha relación en común por lo que nos pareció conveniente realizar los análisis considerándolos como un conjunto puesto que los que se le está pidiendo a los estudiantes es continuar con la variación de los deslizadores, pero ahora con la búsqueda de un objetivo, el cual va a ser las intersecciones posibles con las gráficas. Observen la tabla siguiente:

Tabla 33. Objetivos planteados en los ítems b), c) y d)

Ítem	Objetivo del ítem	
b	se espera como objetivo que los estudiantes encuentren posibles valores en los deslizadores de tal forma que las gráficas de las funciones...	… en dos puntos
c		… en un solo punto
d		… en ningún punto

Descripción de ambos equipos

Tabla 34. Desarrollo de los ítems por ambos equipos

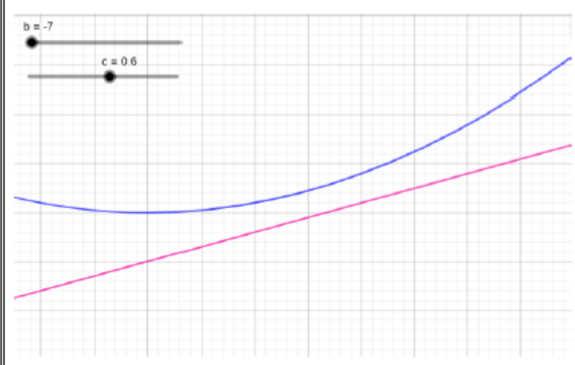
Equipo 1

Ítem b: gráficas intersecan en 2 puntos

Valores de b	Valores de c
b = ___4.4___	c = __-0.5_____
b = __-1.8_____	c = ___-0.7____
b = _2.5_____	c = __1.2_____
b = _-4.2______	c = __-0.4 _____

Ítem c: gráficas intersecan en 1 punto

Siempre dos puntos de interceptan, no se pudo lograr encontrar los posibles valores para que un solo punto se intersecte



Ítem d: gráficas intersecan en ningún punto

Valores de b	Valores de c
b = _____6.9 ___	c = __-1.3_____
b = __-5.1_____	c = _ 2.8______
b = __-2.9_____	c = __5.9 _____
b = __-3.4_____	c = _2.4 ______
b = ___-7______	c = ____2.7____

Equipo 2

Ítem b: gráficas intersecan en 2 puntos

Valores de b	Valores de c
b = 3.4	c = 7 c
b = 6.7	= 5.4 c
b = 2.5	= -3 c
b = -2	=1

Ítem c: gráficas intersecan en 1 punto

Valores de b	Valores de c
b = 4.6	c = 0.6
b= -0.1	c= -2.2
b= -7	c= -4.8
b= -2.7	c= -1.7

Ítem d: gráficas intersecan en ningún punto

Valores de b	Valores de c
b = 4 b	c = 7 c
=2.5 b	=-2 c =
= -2.9	1.9 c =
b = 3.4	-1.3

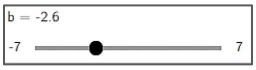
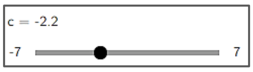
Los estudiantes analizaban la situación y variación de las funciones presentadas en los ítems mencionados. Con relación al equipo 1, los estudiantes se organizaron roles para que cada uno analice un ítem determinado. Al estudiante que le tocó el ítem c, se les presentó mayor dificultad con relación a los demás, puesto que no encontraba una variación que dé respuesta a lo pedido. Sobre ello, a todos los estudiantes les parecía extraño no encontrar respuesta por lo que decidieron ampliar la gráfica y mover ligeramente los deslizadores (recordemos que los deslizadores *b y c* se encuentran en una ampliación de 0.01). Finalmente, optaron por detallar que no habría solución al requerimiento. Ahora bien, con relación al equipo 2, los estudiantes trabajaron en equipo en una pantalla compartida que uno de los integrantes proyectó. Dialogaban con respecto a los valores de los deslizadores y buscaban soluciones a todos los ítems. Muy parecido al equipo 1, también presentaron dificultades en encontrar dichos valores que hace posible esa condición, sin embargo, pudieron interpretar algunos valores junto a una evidencia que correspondía directamente al ítem c. Finalizando la actividad 3, ambos equipos procedieron a compartir las fichas de trabajo.

Análisis a posteriori

Análisis a posteriori para ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 35. Identificando los puntos de intersección de su propia función cuadrática (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Intersección en una función**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
	I	*Deslizador de b* 	El arrastre del punto del deslizador	Coeficiente que acompaña a x^2
Ambos equipos	**II**	*Deslizador de c* 	El arrastre del punto del deslizador	Coeficiente que acompaña a x
	III	*Punto de intersección*	El arrastre de uno o ambos deslizadores	Punto(s) de intersección en las funciones

Con relación al equipo 1, se evidenció la emergencia de realizar Zoom a la vista gráfica de las funciones, esto debido a la necesidad de dar respuesta al *ítem c*, donde se apreció que pudieron integrar una propiedad que presenta el GeoGebra a la estrategia que plantearon en equipo de manera que obtengan respuesta a la condición. Luego de no dar solución, redactaron las razones con evidencia del porqué no pueden intersecarse en un solo punto. En cuanto al equipo 2, la estrategia de encontrar los posibles valores según la condición de cada ítem hizo que consignen valores equivocados a los deslizadores en el ítem c). Del mismo modo, presenta evidencias que no cumple con la condición pero que no se ha presentado en la descripción por motivo del análisis. Finalmente, con dicha introducción al uso de los deslizadores se puede enfatizar una de las intencionalidades del artefacto GeoGebra el cual parte de la idea de Rabardel (2011) "cada artefacto es diseñado para producir una clase de efectos, y su utilización, en las condiciones previstas por los diseñadores, permite actualizar esos efectos" (p. 91).

Análisis de la Actividad 4

En la Tabla 36 se presenta la Actividad 4 donde se planteó una actividad de crear y graficar funciones de acuerdo a una tabla de valores. Después de las tres actividades resueltas, se espera que los estudiantes puedan practicar por sí mismo la construcción de una función, utilizando sus esquemas de acción instrumentada para determinar los elementos necesarios. Para ello se les presentó tres tablas de valores, los cuales permitieron que se familiaricen con la vista Hoja de cálculo que ofrece el GeoGebra. Esto permite a que puedan comprender mejor las secuencias de desarrollo de la actividad 6, el cual se hace uso de la vista hoja de cálculo debido a que se trabajará un problema contextualizado para introducir a la función exponencial.

Tabla 36. Actividad 4

ACTIVIDAD 4

Temática: Analizar la construcción de las gráficas de funciones creadas por una lista de puntos

En el archivo Actividad_4.ggb representará una de las funciones con los datos de su tabla usando las herramientas disponibles en GeoGebra

Función f	Función g	Función h

X	Y
0	-2
1	1
2	4
3	7
4	10

X	Y
-1	1/8
0	¼
1	½
2	1
3	2

X	Y
1	1
2	4
3	9
4	25
5	36

a) Grafique la función con los puntos representados en la tabla
b) A continuación, redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron en la parte a).

Proceso gráfico de la función creada
A su consideración ¿Qué tipo de función es?

Figura 44. Espacio de trabajo de la Actividad 4 en GeoGebra Classroom

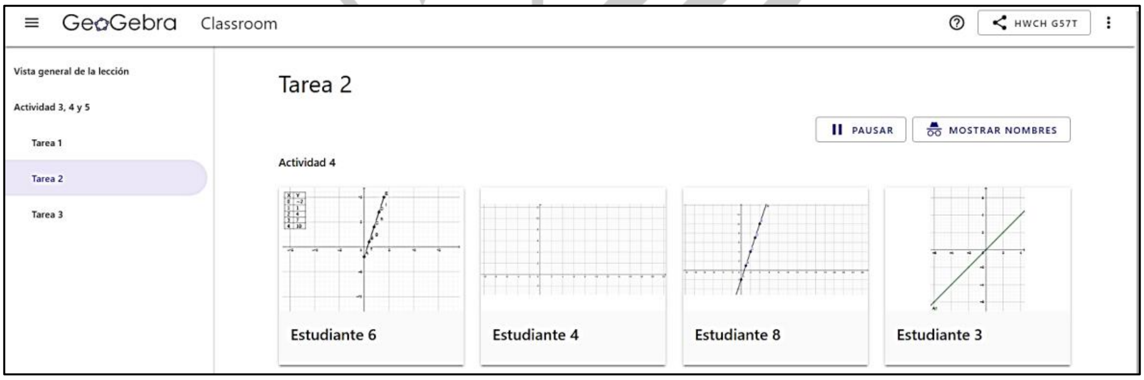


Figura 45. Actividad 4

En el archivo Actividad_4.ggb (Tarea 2) representará una de las funciones con los datos de su tabla usando las herramientas disponibles en GeoGebra

Función f		Función g		Función h	
X	Y	X	Y	X	Y
0	-2	-1	1/8	1	1
1	1	0	¼	2	4
2	4	1	½	3	9
3	7	2	1	4	25
4	10	3	2	5	36

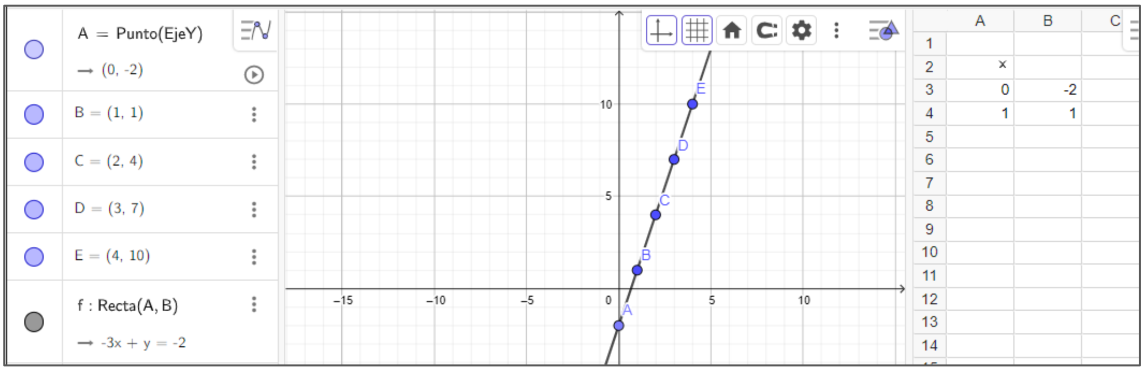
Ítem a)

Análisis a priori

Los estudiantes en equipo seleccionan una de las tablas de valores para formar una función con los valores de X e Y. Para ello los estudiantes activan la vista Hoja de cálculo del GeoGebra con el fin que replique la tabla. Posterior a ello se espera que creen una *Lista de puntos* [Lista de puntos | + Crea] de manera que posterior a ello visualicen que los valores digitados representan puntos de la gráfica de la función escogida. Ahora bien, el resultado de su gráfica de función puede ser ejecutado por diversos comandos estudiados hasta este momento o con la función *Ajuste* (por ejemplo, [AjusteLineal(<Lista de puntos>)] *AjusteLineal* de ser una función lineal) en la barra de entrada de acuerdo a la distribución de los puntos y el propio criterio del equipo.

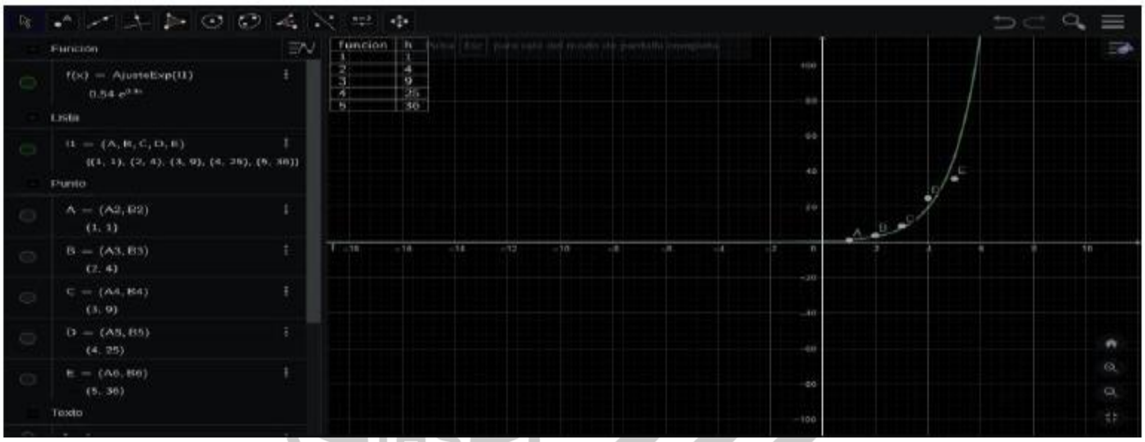
Descripción de ambos equipos

Figura 46. Gráfica desarrollada por el Equipo 1



Para la resolución de este ítem, hubo unanimidad en la elección de una tabla de valores. Escogieron la primera tabla de valores (Función *f*) el cual representa una relación directa entre los valores X e Y haciendo que la gráfica corresponda a una función lineal. De esta forma, colocando los puntos en la hoja de cálculo, logrando replicar dos pares coordenados, sin embargo, tuvieron dificultades en graficar el resto de los puntos. Por tal motivo decidieron completar los puntos usando la opción *gráfica de punto*. Finalmente, para la unión de los puntos se utilizó la opción *recta que pasa por dos puntos* escogiendo dos puntos de la tabla.

Figura 47. Grafica desarrollada por el Equipo 2[24]



Para la resolución de este ítem, hubo debate entre la elección de la tabla de valores. Finalmente, los estudiantes optaron por usar la segunda tabla (Función *g*). El trabajo en equipo fue establecido con la misma dinámica de trabajar juntos en el GeoGebra Classroom siguiendo como referencia lo desarrollado en la pantalla de un integrante. Los estudiantes replicaron la tabla en la vista Hoja de cálculo del GeoGebra, seguidamente, construyeron una Lista de Puntos y aplicaron la función de dichos puntos usando la función *AjusteExp.*

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

[24] El fondo presentado del programa se da por la personalización propia el Equipo 2

Tabla 37. Graficando funciones con tabla de valores (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Gráfica de una lista de puntos			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	Hoja de cálculo	Activar la vista hoja de cálculo	Vista Hoja de Cálculo
	II	Tabla de valores en GeoGebra	Crear *lista de puntos*	Puntos en el plano
Solo Equipo II	**III**	Barra de entrada	Escriben la función *Ajuste*	Gráfica de la función
Solo equipo I	**IV**	Opción *recta que pasa por 2 puntos*	Clic del mouse	Recta

Con relación al Equipo 1, los estudiantes movilizaron esquemas de uso sin ninguna complicación como activar la vista hoja de cálculo y la opción recta que pasa por dos puntos. Sin embargo, tuvieron dificultades en poder completar la tabla de valores y con ello generar los puntos inmediatamente. Solamente pudieron graficar dos pares ordenados con la opción lista de puntos y los demás, pudieron determinar a través de la barra de entrada, con respecto a ello Trouche (2004), comenta que la barra de entrada se encuentra en un primer estadio de instrumentalización. Por otro lado, con relación al Equipo 2, los estudiantes adquirieron nuevos esquemas de acción al realizar correctamente los elementos específicos en la vista Hoja de cálculo como la creación de la lista de puntos. Las funciones proporcionadas por dicha vista fueron suficiente para graficar los puntos en el plano, y, además, con los esquemas de uso de la barra de entrada, se observó que no tuvieron dificultad graficar la función de dichos pares ordenados con la función *Ajuste*. Entonces, de manera general, el uso en distintos momentos de dos componentes del artefacto GeoGebra permitió que los estudiantes interactúan en la construcción de una función.

Ítem b)

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes explican de manera breve las secuencias de sus acciones en la construcción de las gráficas de funciones. Describen aspectos de sus acciones en equipo como resultado del trabajo sincrónico en conjunto y a su propio juicio, determinan a que tipo de función corresponde la gráfica.

Descripción del trabajo en equipo 1

Figura 48. Actividad 4-b desarrollada por el equipo 1

Proceso gráfico de la función creada
Primero colocamos todos lo puntos en la gráfica utilizando la entrada de calculo, donde decidimos por utilizar la barra de herramientas de la parte izquierda superior o utilizar un comando de recta del Punto A al Punto E.
A su consideración ¿Qué tipo de función es? Función Lineal F : Recta(A, E) $\rightarrow -3x + y = -2$

En su redacción el estudiante que compartía la pantalla compartía su interfaz del GeoGebra y consideraba algunas de las opiniones de sus demás compañeros aun así no fue registrado correctamente en su gráfica presentada.

Análisis a posteriori del Equipo 1

Creemos que los estudiantes de este equipo fueron influenciados por el integrante que compartía la pantalla debido a que sus demás compañeros sí lograron replicar la tabla de valores en la vista Hoja de cálculo. Por otro lado, se observa que, entre sus esquemas de utilización, todavía considera que el formar una recta que pasa por dos puntos sigue representando algebraicamente una función.

Figura 49. Actividad 4-b desarrollada por el equipo 2

Primero utilizamos las 3 rayas (referida a MENÚ) luego pusimos en *vista/hoja de cálculo,* luego graficamos la función *h* (selecciona una tabla de doble entrada), después seleccionamos la tabla y presionamos anti clic y seleccionamos a continuación presionamos *Crea_/lista de puntos*, además en la barra de entrada añadimos *AjusteExp(l1)* y con la tecla ENTER lo graficamos, por último en *Crea/Tabla* para poder tener la tabla en la gráfica
A su consideración ¿Qué tipo de función es? Es una función exponencial

El Equipo 2 consignó su redacción de acuerdo a lo hecho paso tras paso colocando en pequeñas imágenes aquellos comandos que eran para nuevos para ellos. Asimismo, entre medio de dudas pudieron responder a que tipo de función corresponde la gráfica.

Análisis a posteriori del Equipo 2

Creemos que los estudiantes de este equipo han podido desarrollar nuevos esquemas de utilización similares debido a la participación de los integrantes en el GeoGebra con el desarrollo del ítem. Aunque dicho esquema generado aún no se concreta, esto porque existió ausencia de relacionar los comandos utilizados con el nombre que les corresponde.

Análisis de la Actividad 5

En la Tabla 38 se presenta la actividad 5, donde en el desarrollo de esta actividad esperamos que los estudiantes se familiaricen con la noción de dominio y rango dentro de las construcciones gráficas del GeoGebra, cuando grafiquen una función lineal y cuadrática definidas en un intervalo o dominio restringido usando la barra de entrada como instrumento principal. Al mismo tiempo se espera que los estudiantes disciernan y diferencien de un instrumento con otro en el mismo GeoGebra. Dicha actividad (Tarea 3) fue la última del segundo encuentro por lo que se sigue conservando la clase creada desde la Actividad 3 tal como se muestra en la Figura 50

Tabla 38. Actividad 5

ACTIVIDAD 5

Temática: Determinar el dominio y rango de dos funciones comprendidas en un intervalo

Considerando las siguientes funciones cuyas reglas de correspondencia y dominios son las siguientes:

$$f(x) = x^2 - 3x, x \in [-3; 2] \text{ y } g(x) = 2x - 3, x \in [-4; 3]$$

A través del ingreso de comandos en la "Barra de Entrada" y del uso del archivo "Ayuda del GeoGebra" ubicado en la ruta: en la carpeta "Actividades_Función Exponencial" de su aula virtual, efectúen lo siguiente:

a) Mediante el uso de un comando apropiado grafiquen la función $f(x)$ en el archivo Actividad_5a.ggb de GeoGebra.

b) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte a).

Proceso gráfico de la función creada	
Mencione el rango de la función	

c) Escribiendo un comando diferente al usado en a), grafiquen la función $g(x)$ en el mismo archivo Actividad_5a.ggb de GeoGebra.

d) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte c).

Proceso gráfico de la función creada	
Mencione el rango de la función	

Figura 50. Espacio de trabajo de la Actividad 5 en GeoGebra Classroom

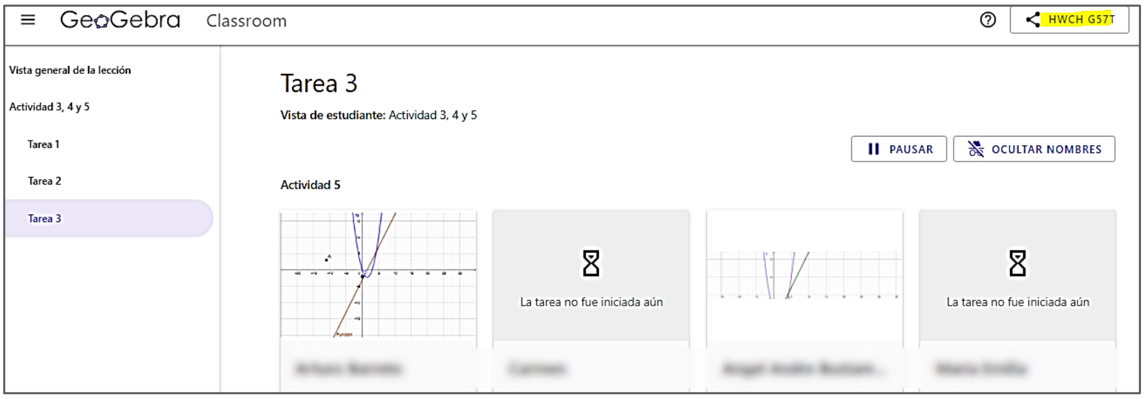


Figura 51. Actividad 5

Considerando las siguientes funciones cuyas reglas de correspondencia y dominios son las siguientes:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^2 - 3x, x \in [-3; 2] \;\; y \; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 2x - 3, x \in [-4; 3]$$

A través del ingreso de comandos en la "Barra de Entrada" y del uso del archivo "Ayuda del GeoGebra" ubicado en la ruta: en la carpeta "Actividades_Función Exponencial" de su aula virtual, efectúen lo siguiente:

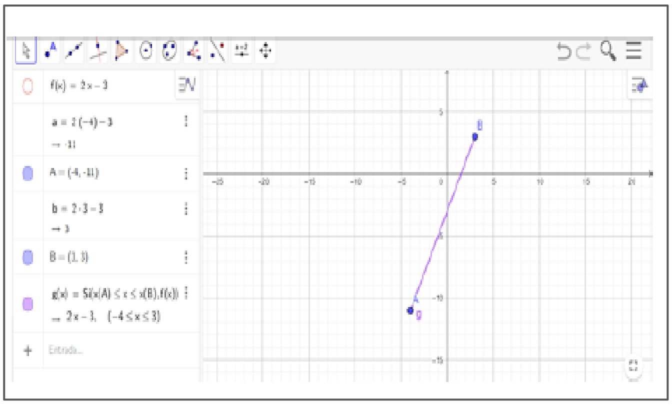
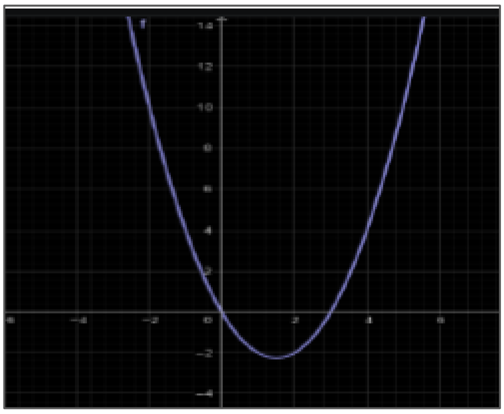
Ítem a)

Análisis a priori de ambos equipos

Los estudiantes grafican la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^2 - 3x$ delimitando el dominio entre el intervalo $x \in [-3; 2]$. Se espera que los estudiantes desarrollen un proceso similar a lo visto en la Actividad 1, eligen la barra de entrada y redactan la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ usando el **Función**(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>) comando de modo que la función se encuentre delimitada, pero tienen que reconocer qué valor colocar en valor inicial y final. Luego de ello, presionan la tecla *Enter* para obtener la representación gráfica.

Descripción de ambos equipos

Figura 52. Representación $f(x)$ de los equipos 1 y 2

Los estudiantes del Equipo 1 graficaron la función $g(x)$ en vez de la función $\boldsymbol{f(x)}$ ya que era el requerimiento del ítem. Sin embargo, en su proceso se puede mencionar lo siguiente: se dividieron algunos de los elementos a encontrar en la construcción de la gráfica, de tal forma que cada integrante del equipo tenga designada una tarea. Primero comenzaron a colocar la regla de correspondencia de la función $\boldsymbol{f(x)}$ tal cual, luego empezaron a delimitar la función de acuerdo al valor de x, reemplazando en la regla de correspondencia. Finalmente, habiendo encontrado los pares ordenados que delimita la función, juntos procedieron a usar el comando en su zona de trabajo para conseguir la función requerida $\boldsymbol{f(x)}$. Ahora bien, en cuanto al Equipo 2 en comparación con el Equipo 1, ellos si leyeron mejor las indicaciones y procedieron a graficar la función $g(x)$ donde cada integrante graficó la función usando la barra de entrada, sin embargo, en el proceso no consideraron la delimitación de la función. Solamente pudieron graficar la la función $g(x)$ con dominio y rango infinito.

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta los siguientes elementos que interactúan en el ítem presentados en la Tabla 39:

Tabla 39. Graficando la función f(x) en un intervalo cerrado – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Gráfica de una función delimitado por un intervalo			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto

Solo Equipo 2	**I**	Barra de entrada	Escribe la regla de correspondencia de $g(\boldsymbol{x})$	Gráfica de la función $g(\boldsymbol{x})$
Solo Equipo 1	**II**	Barra de entrada	Encuentro el valor de *y* reemplazando los valores de *x* en el intervalo	Pares ordenados donde delimita la función $f(\boldsymbol{x})$
	III	Comando Función [ ]	Escribe la regla de correspondencia junto a los valores del intervalo	Gráfica de la función $f(\boldsymbol{x})$

En esta ocasión se comenzará el análisis con el equipo 2. Si bien ejecutaron correctamente la gráfica indicada, ellos no pudieron completar la actividad tal como se esperaba en el análisis a priori puesto que no movilizaron los esquemas de usos ya concebidos con anterioridad: delimitar la función, identificar los pares ordenados extremos. Podemos suponer que esto se debió a la manera en que se presentó la regla de correspondencia, algo que de algún modo aún no ha adecuado a sus conocimientos previos. Sin embargo, luego de la ejecución de la barra de entrada se puede mencionar que no presentan dificultades en el inicio de la génesis instrumental del comando Función [ ] ya que las restricciones de modalidad de existencia (desde el enfoque de Rabardel) son percatados por los estudiantes al no realizar una escritura precisa de la sintaxis de la función $g(\boldsymbol{x})$**.** Esto último, se comparte por lo trabajado en el Equipo 1 más aun que haya habido una confusión en escoger la función correcta.

En su desarrollo se puede evidenciar lo siguiente: en primer lugar, determinaron correctamente la regla $f(\boldsymbol{x})$ sin dificultades, para luego proceder a encontrar los puntos donde van a ser delimitados. En ese entonces, descubrieron al GeoGebra como una calculadora al realizar operaciones cuando el valor de *x* se reemplaza en la regla. Podemos decir un indicio del surgimiento de una génesis instrumental por parte de los estudiantes de dicho equipo, donde el artefacto GeoGebra en sí se convierte en un instrumento acorde a las necesidades que este se enfrente. Pero esta relación de acciones-resultados todavía no se encuentra del todo constituida además que, constituyen lo que Vygotsky llamaba los “actos instrumentales”, para los cuales “hay una recomposición de la actividad dirigida hacia la tarea principal del sujeto” (Rabardel, 2011, p. 172).

Ítem b)

Análisis a priori de ambos equipos

En este ítem los estudiantes explican en su ficha de trabajo la secuencia de acciones que han desarrollado, también mencionan el rango de la función $f\,(x)$. En ningún momento los estudiantes explican porque eligieron dicho comando.

Descripción del Equipo 1

Figura 53. Actividad 5-b desarrollada por el Equipo 1

Proceso gráfico de la función creada	
Primero colocamos todos lo puntos en la gráfica utilizando la entrada de calculo y después pusimos en la entrada una recta que uniera con los puntos.	
Menciona el rango de la función	(3,3) (-4,-11)

Los estudiantes redactaron el paso más adecuado que utilizaron para obtener la gráfica y luego de ello, a partir de la gráfica reconocieron qué valor es el rango de $f(x)$.

Descripción del Equipo 2

Figura 54. Actividad 5-b desarrollada por el Equipo 2

Proceso gráfico de la función creada	
Solamente en la barra de entrada pusimos f(x)=$x^2 - 3x$ después presionamos enter para que se ponga en la grafica.	
Mencione el rango de la función	El rango es$[-2{,}25; +\infty$

Los estudiantes redactaron el paso más adecuado que utilizaron para obtener la gráfica y luego de ello, a partir de la gráfica reconocieron qué valor es el rango de $f\ (x)$.

Análisis a posteriori de ambos equipos

A diferencia del Equipo 1, el Equipo 2 no determinó correctamente el rango de la función esto debido a que no tenían delimitado la función. Por otro lado, el Equipo 1 mantiene su estructura esquemática con algunos comandos aplicado en la Actividad 1, por lo que gradualmente sus esquemas van pasando a ser un esquema de acción instrumentada.

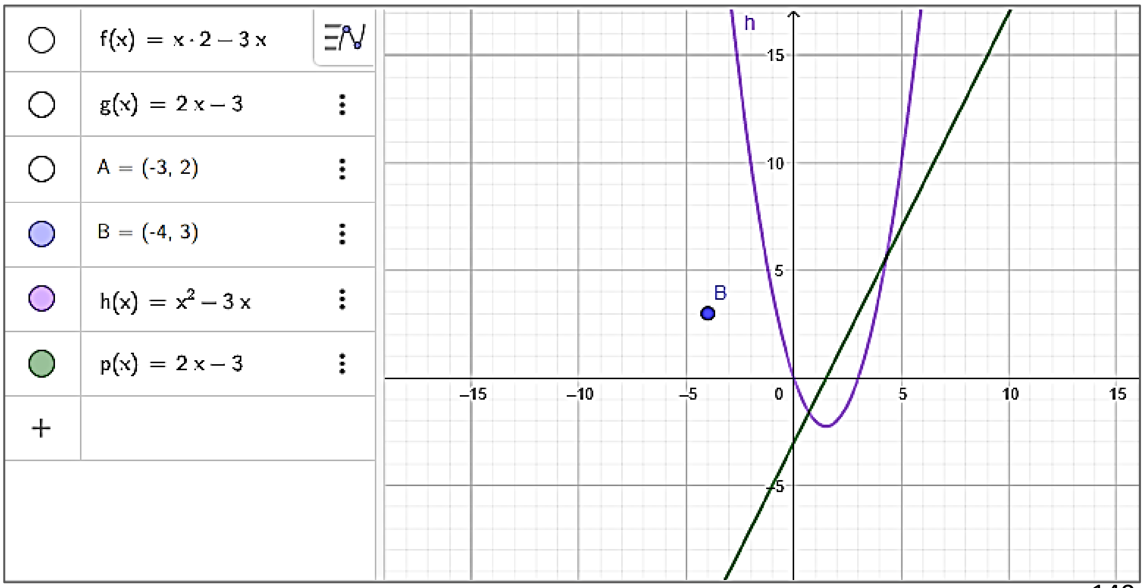
Ítem c)

Análisis a priori de ambos equipos

En este ítem se espera que los estudiantes grafiquen la función $g(x)$ en el mismo applet de GeoGebra donde se graficó la función $f(x)$, pero en esta ocasión se espera que los estudiantes puedan construir la gráfica a partir de otros comandos. Se espera que los estudiantes superen las dificultades encontradas en el primer ítem.

Descripción del Equipo 1

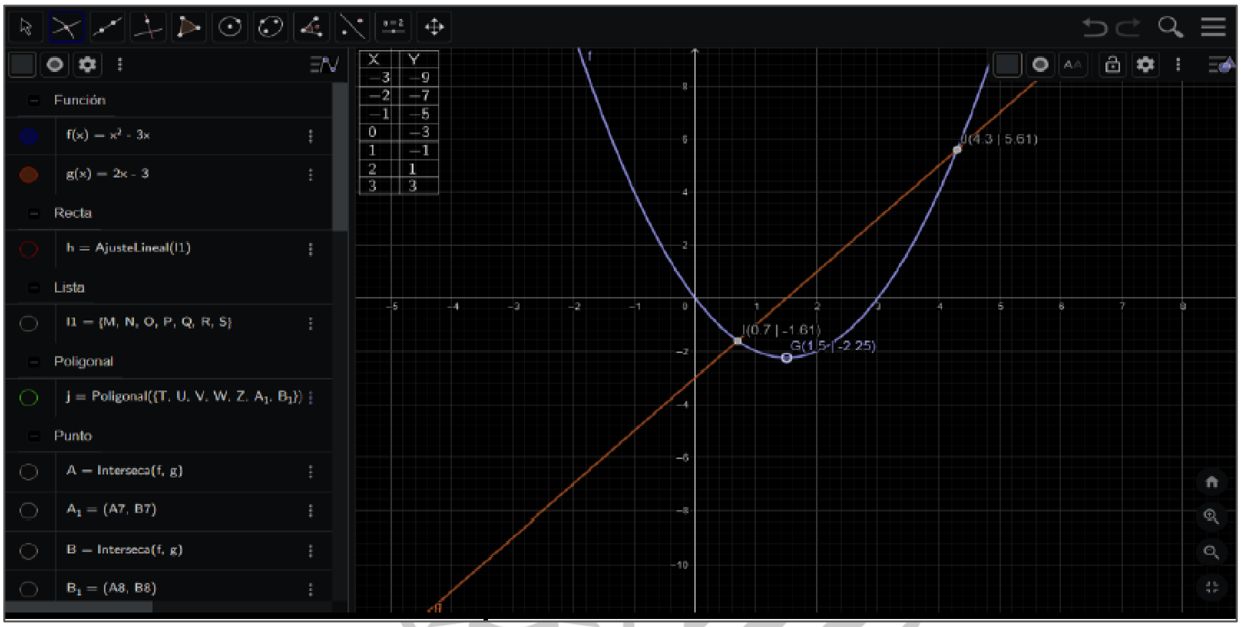
Figura 55. Graficando la función $g(x)$



De acuerdo a la Figura 55 se puede observar que los estudiantes obtuvieron dificultades en la gráfica de la función $g(x)$, pero luego se dan cuenta del detalle y grafican correctamente la función. Pero ambos sin considerar la delimitación de las funciones.

Descripción del Equipo 2

Figura 56. Graficando la función $g(x)$



Similar a lo ocurrido en el Equipo 1, conserva las graficas $f(x)$ y $g(x)$ con dominio en todos los reales. Para la construcción de la gráfica $g(x)$, los integrantes construyeron una tabla de valores considerando los valores de *x* cuando $x \in [-4; 3]$.

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, consideramos estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 40. Graficando g(x) en un intervalo cerrado (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Gráfica de la función g(x)			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto

Ambos equipos	**I**	Barra de entrada	Escribe la regla de correspondencia de $g(\boldsymbol{x})$	Gráfica de la función $g(\boldsymbol{x})$
Solo Equipo 2	**II**	Vista Hoja de cálculo	Construir tabla de valores	Tabla de valores de la función g$(\boldsymbol{x})$

Luego de las evidencias de cada equipo se puede inferir que ninguno usó el comando Función [ ], por lo cual el esquema de utilización se perdió durante esta actividad. Ambos equipos propusieron las mismas gráficas utilizando la barra de entrada para construcción, si bien la tarea estaba destinada a generar un nuevo esquema de uso con uno de los comandos del GeoGebra ayuda a graficar. Sin embargo, con respecto al aporte del Equipo 2, podemos decir que la vista hoja de cálculo se encuentra en un estadio de instrumentalización.

Ítem d)

Análisis a priori de ambos equipos

Los estudiantes redactarán en la ficha de trabajo compartida la secuencia de acciones que utilizaron en el ítem c) y del mismo modo determinarán el rango de la función g(x).

Descripción del Equipo 1

Figura 57. Actividad 5-d desarrollada por el Equipo 1

Proceso gráfico de la función creada	
En la entrada coloque las funciones para encontrar los puntos mas importantes y encontrar la división de la figura	
Menciona el rango de la función	(-3,18)(2,-2)

Descripción del Equipo 2

Figura 58. Actividad 5-d desarrollada por el Equipo 2[25]

Primero calculamos en una hoja aparte el valor de la vértice de la función con la formula $\frac{-b}{2a}$ que el proceso seria x=$\frac{-(-3)}{2(2)}=\frac{3}{4}=0.75$ luego hallamos y=2x-3=$2(-2)-3=-4-3=-7$; por lo tanto V=(0.75;-7) después en la hoja de cálculo graficamos los valores que son (*muestra la tabla de valores*), a continuación, estos datos se grafican en la hoja de cálculo y procedemos seleccionando la tabla y poniendo *Crea* para luego seleccionar *Lista de puntos* para poner los puntos en la gráfica continuacion seleccionam *Tabla* para visualizar los puntos en una tabla en la grafica por ultimo en la barra de entrada pusimos *AjusteLineal(l1)* para unir los puntos en una funcion y para que aparezca presionamos la tecla enter	
Mencione el rango de la función	El rango es $[0.75;+\infty$

Análisis a posteriori de ambos equipos

Los estudiantes describen de forma precisa y secuenciada sus acciones al instrumentalizar el comando de la barra de entrada, aunque se esperaba que instrumentalicen el comando Función [ ], por lo que podemos decir que este se encuentra aún en estadio de descubrimiento. En este sentido, se comprueba cómo las acciones de los estudiantes del Equipo 2 están ligadas con instrumentalizar el comando *Ajuste* y vista hoja de cálculo. Además de ello, pone en acción sus esquemas de uso relacionado a conocimientos previos sobre la parábola. Se puede observar cómo considera al vértice como el inicio del rango y que este se prolonga hasta el ∞ debido a que no se colocó ninguna delimitación de la función. Y con relación al Equipo 1, no se especifica una información relevante acorde a lo esperado por lo que han presentado dificultades.

Análisis de la Actividad 6

En la Tabla 41 se presenta la Actividad 6, actividad donde se introduce el primer indicio de función exponencial a partir de dos situaciones contexto que involucra el

[25] De manera similar a la Figura 58, se presenta las respuestas realizadas por el Equipo sin ninguna intervención del investigador

estudio de las progresiones geométricas y la fórmula de capital con interés compuesto. En un inicio, se presenta la situación y se espera que los estudiantes resuelvan el problema de acuerdo con sus conocimientos adquiridos. Para ello, se espera que los estudiantes interpreten sin problemas la creación de una función exponencial a partir de los problemas y a partir de los comandos trabajados en las actividades previas como: uso de deslizadores, lista de puntos, intersecciones con el plano, construcción de una función, etc.

Tabla 41. Actividad 6

ACTIVIDAD 6

Temática: Introducir el contenido de función exponencial a partir del estudio de las progresiones geométricas y la fórmula de capital con interés compuesto

En el archivo Actividad_6a.ggb encontrarán una situación problemática referido al tema de progresiones geométricas:

Para el concurso de murales decorativos con respecto al Bicentenario del Perú se inscribieron 256 estudiantes. Lo singular del concurso es que pintarán todas las paredes externas de un cerco perimétrico, lo cual servirá para confraternizar y celebrar dicho evento.

La modalidad de eliminatorias es que cada dos murales compiten entre sí y después de ser evaluados por el jurado en una primera ronda, sólo los ganadores pasaran a la segunda ronda. Posteriormente, los ganadores de esta ronda pasarán a la tercera, cuarta, quinta, etc., sucesivamente hasta llegar a la final. Entonces ¿cuántas rondas se realizarán antes de llegar a la final?

a) Desarrollen el ejercicio según sus conocimientos previos y luego inserte su desarrollo en dicho espacio:

Proceso de resolución

b) Mediante el uso de Hoja de cálculo en el GeoGebra se procede a desarrollar la situación problemática. Luego responda:

I. Si relacionamos los valores de los pares ordenados formando una gráfica ¿Representaría a una función? ¿Qué tipo de función?

II. ¿Pueden encontrar alguna similitud entre progresiones geométricas y función algebraica? Explique

III. En otro contexto, ¿Qué preferirían, que le den un millón de dólares o un dólar el primer día, el doble de dólar el siguiente día y el doble de dólar del día anterior y así de esta manera por un mes? Justifique

c) En el archivo Actividad_6b.ggb encontrarán otra situación problemática referido al tema de interés compuesto:

Un capital de s/. 10.000 se coloca al 5,5% anual durante tres años. ¿Cuál es el capital producido mediante interés simple? ¿Y mediante interés compuesto?

d) Desarrollen el ejercicio según sus conocimientos previos y luego inserte su desarrollo en dicho espacio:

Proceso de resolución

e) Mediante el uso de deslizadores en el GeoGebra se procede a desarrollar la situación problemática. Luego responda

I. ¿Se forma alguna gráfica de función? ¿Y cuál es la función que interpreta mejor el problema?

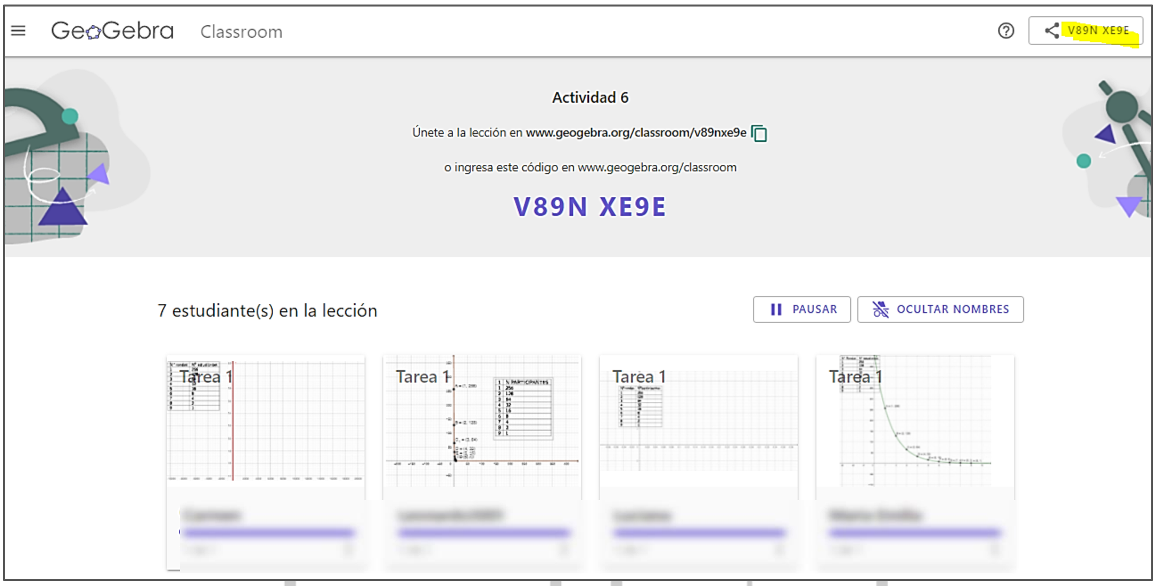
II. ¿Qué semejanzas puedes establecer entre un interés compuesto e interés simple con las gráficas de función?

III. ¿Cómo la función exponencial es interpretada aplicando el interés compuesto?

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

Cabe resaltar que dicha Actividad se desarrolló en un tercer encuentro debido a la demanda de tiempo que iba a constituir por lo que se creó otra clase en GeoGebra Classroom tal como se muestra en la Figura 59.

Figura 59. Clase creada en GeoGebra Classroom para la Actividad 6



Ítem a)

Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes pongan en acción sus conocimientos previos y adquiridos para dar respuesta al problema contexto.

Figura 60. Desarrollo de la Actividad 6a realizada por el Equipo 1 y Equipo 2

Proceso de resolución

Resolución:

total de estudiantes:256

nos dice que la modalidad de eliminatorias es cada dos murales

256/2=128	8/2=4
128/2=64	4/2=2
64/2=32	2/2=1
32/2=16	
16/2=8	Por lo tanto realizarán 8 rondas

(a) Equipo 1

Proceso de resolución

Se debe hallar cuantos participantes hay y dividirlos entre 2 ya que en cada ronda de eliminatorias se realiza con 2 competidores y contando las rondas finales serian contando la final que son 8

(b) Equipo 2

Descripción de ambos equipos

Cada integrante de cada equipo procedió a resolver por su cuenta el ejercicio contexto. Luego de unos minutos, se compartió la resolución y respuestas y los equipos empezaron a designar el mejor elaborado para compartir en la ficha de trabajo.

Análisis a posteriori

De acuerdo con las evidencias presentadas, ambos equipos dieron la misma respuesta y entre sus procesos de resolución destacaron aplicar división y buscar cierto criterio inductivo para dar con la respuesta.

Ítem b)

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes desarrollan junto al investigador la resolución del problema contexto. Para ello, se espera que en las construcciones de los estudiantes pongan en acción sus esquemas de acción colectiva instrumentada sobre la vista hoja de cálculo, lista de puntos y función *ajuste.*

Descripción de ambos Equipos

Figura 61. Evidencia de trabajo de un integrante del Equipo 1

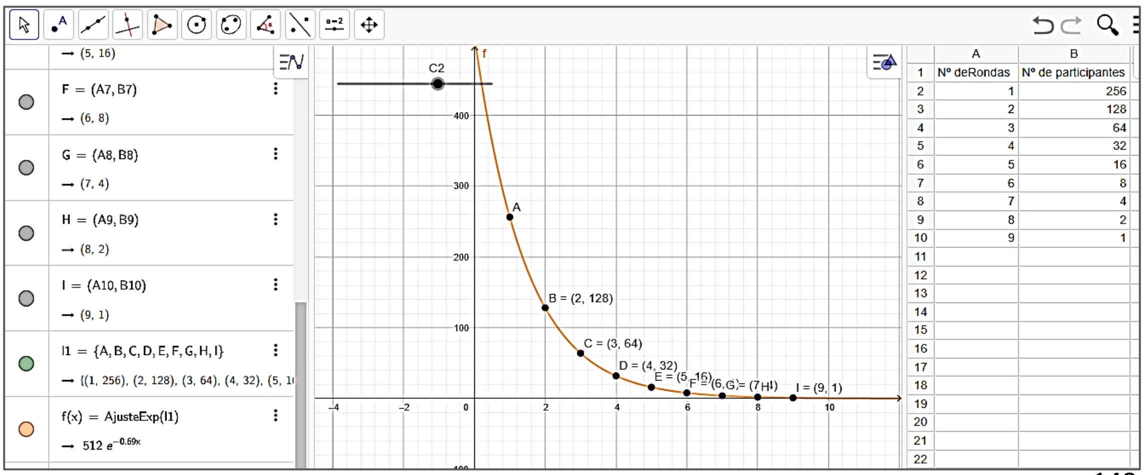
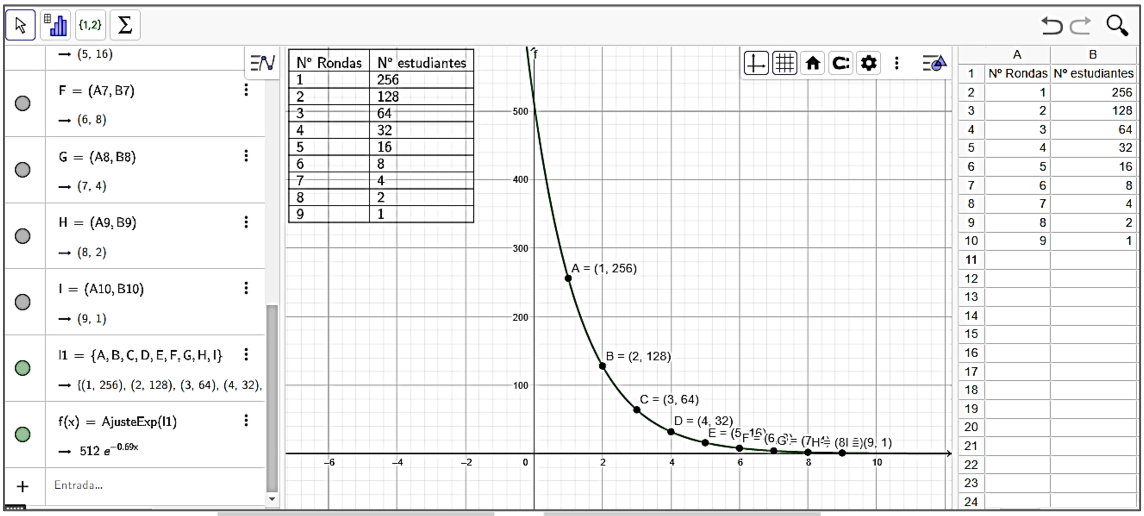


Figura 62. Evidencia de trabajo de un integrante del Equipo 2



Si bien hubo seguimiento por parte del investigador, las construcciones de los estudiantes y la personalización de su creación parte de las propias acciones de los involucrados. Luego de desarrollar la gráfica, los estudiantes no podían reconocer que tipo de función era, y en particular, se esperaba ello puesto que la función exponencial se presentaba como un tema de estudio nuevo.

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 42. Actividad 6b (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Introduciendo a la función exponencial**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	Función *ajuste*	Escribe e identifica la función obtenida	Gráfica de una función con los puntos
	II	Vista Hoja de cálculo	Construir tabla de valores	Tabla de valores de la función $g(x)$

III	Lista de puntos	Clic del mouse en propiedades de la tabla	Representación de los datos del ejercicio

Con dichas evidencias presentadas, se cumplió lo que se esperaba en el análisis a priori. Los esquemas preexistentes de la creación de una lista de puntos, la activación de la hoja de cálculo permitió que los equipos 1 y 2 pudieran ver la orientación y sentido de la lista de puntos a partir de un problema que refiere al objeto matemático progresiones geométricas. Si bien los estudiantes no reconocían la regla de correspondencia y propiedades de una función exponencial, si podían diferenciar que era muy distinta a un función cuadrática y lineal. Por otro lado, la gráfica de esta función exponencial presenta restricciones de estructuración de acción activo puesto que posibilita al participante nuevas modalidades de organización de su acción por que el artefacto GeoGebra tiene “un conocimiento del operario y trata de modificar el funcionamiento del mismo, de influir su actividad” (Rabardel, 2011, p. 15). Por tal motivo, los estudiantes presentaban dificultades en identificar el comando *ajuste* para ver cual se adecua con la lista de puntos. Por último, podemos resaltar la propia autonomía de los participantes con el artefacto cuando realizan su propia personalización en la construcción del gráfico.

Dentro del **ítem b** también hay que rescatar las respuestas de los equipos en cuanto a la comprensión de la unión de los puntos, a la relación entre el objeto matemático progresiones geométricas y función exponencial.

Figura 63. Respuestas de comprensión sobre el ejercicio de los equipos

Equipo 1	**Equipo 2**
Si los valores los graficamos si representa una función y sería algebraica II. ¿Pueden encontrar alguna similitud entre progresiones geométricas y función algebraica? Explique Yo no le encuentro alguna similitud por lo que veo función algebraica trabaja con el plano cartesiano en cambio progresiones geométricas trabaja en una secuencia de números, junto con fórmulas y un factor fijo que lo multiplica.	b) Mediante el uso de Hoja de cálculo en el GeoGebra se procede a desarrollar la situación problemática. Luego responda: I. Si relacionamos los valores de los pares ordenados formando una gráfica ¿Representaría a una función? ¿Qué tipo de función? si representaria una funcion exponencial II. ¿Pueden encontrar alguna similitud entre progresiones geométricas y función algebraica? Explique podemos encontrar que la funcion algebraica (numeros) se puede graficar en una funcion exponencial(geometrica)

Ítem c)

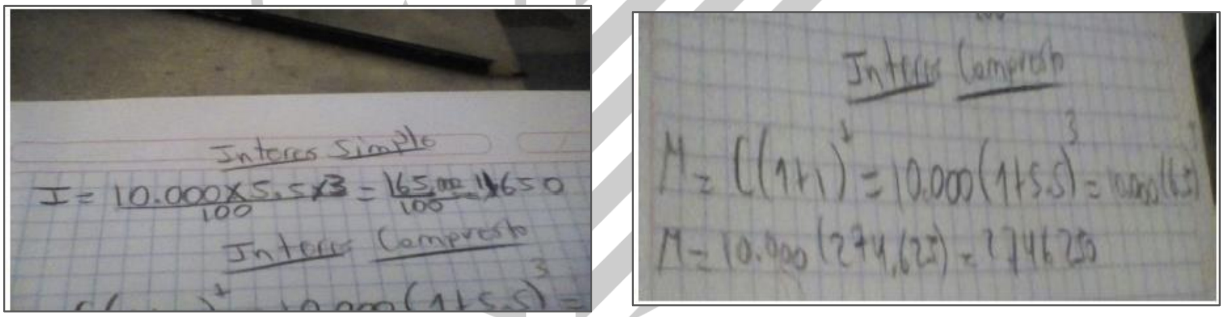
Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes pongan en acción sus conocimientos previos y adquiridos para dar respuesta al problema contexto.

Figura 64. Actividad 6c del Equipo 1

Proceso de resolución
CF(Simple)=11650 CF(Compuesto)=11130.25

Figura 65. Actividad 6c del Equipo 2



Descripción de ambos equipos

Cada integrante de cada equipo resolvió de forma individual el ejercicio con la idea que se compartan su proceso de resolución y respuesta para completar la ficha de trabajo

Análisis a posteriori

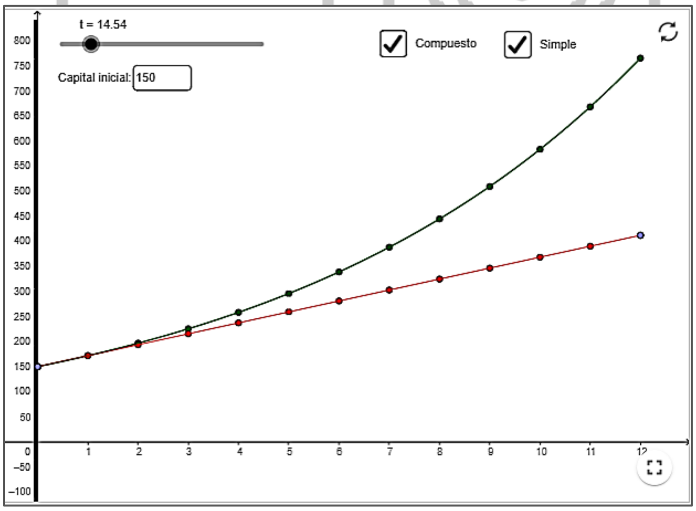
De acuerdo con las evidencias presentadas, ambos equipos dieron respuestas distintas por lo que la discusión de cómo hallar un interés simple o compuesto debía ser enseñada en la presente actividad. Entre sus procesos de resolución se aprecia la aplicación de las fórmulas para hallar los intereses.

Ítem d)

Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes desarrollen junto al investigador la resolución del problema contexto. Para ello, se espera que observen la variación de ciertas gráficas representadas por el objeto matemático interés con ayuda de deslizadores.

Figura 66. Applet donde los estudiantes interactúan las gráficas de interés



Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 43. Actividad 6d (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Gráfica de dos puntos**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**

Ambos equipos	**I**	Deslizador	Identificar la variación de la gráfica de los tipos de interés	Gráfica función exponencial

El presente análisis es para determinar si el deslizador se presenta más transparente en este ítem (con relación a la gráfica de la función exponencial) cuando tenga que analizar el comportamiento de una gráfica usando el comando función *Ajuste*. Dicho ítem es complementado dentro de la secuencia por preguntas de reflexión y razonamiento como, por ejemplo, ¿Y cuál es la función que interpreta mejor el problema? Un estudiante del Equipo 1 responde "*En el interés simple se forma una función algebraica y en el interés compuesto se forma una función lineal"*. Los esquemas de uso que moviliza no se presentan con toda certeza. De igual forma sucedió con la siguiente pregunta ¿*Qué semejanzas puedes establecer entre un interés compuesto e interés simple con las gráficas de función?* A lo que responden lo siguiente:

> Integrante del Equipo 1: Al paso del tiempo las 2 van a crecer, pero el interés simple crecerá más rápido que el compuesto
>
> Integrante del Equipo 2: puedo establecer que en los 2 intereses se grafican con una función propia en un plano cartesiano.

Análisis de la Actividad 7

En la Tabla 44 se presenta la Actividad 7, el cual tiene como objetivo principal que los estudiantes reconozcan el comportamiento de una función exponencial, reconociendo la estructura de su regla de correspondencia, sus principales propiedades con relación a la base y la intersección que ella hace con el eje Y. Dentro a los esquemas de uso con relación al artefacto, se espera que los estudiantes sigan instrumentalizando el comando *deslizador* en la construcción de gráficas y el comando intersección. Finalmente, dicha Actividad 7 (representada como *Tarea 1*) viene acompañada de la Actividad 8, por tal motivo nos encontramos en un cuarto encuentro y en un nuevo espacio de clase dentro del GeoGebra Classroom tal como se muestra en la Figura 67.

Tabla 44. Actividad 7

ACTIVIDAD 7

Temática: Interpretar la expresión de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$

En el archivo Actividad_7.ggb se presenta dos funciones exponenciales cuyas reglas de correspondencia son las siguientes:

$$f(x) = a^x, si -5 < a < 5$$

$$h(x) = b^x, si\ 0 < b < 1$$

Luego de interpretar la gráfica con ayuda de los deslizadores, mencionen lo siguiente

a) Con respecto a la gráfica $f(x)$, ¿qué sucede con la gráfica si x toma valores negativos?

Explique:	**Gráfica:**

b) Con respecto a la gráfica $f(x)$, ¿Qué sucede si el valor de a es igual a 1 y -1?

Explique:	**Gráfica:**

c) Con respecto a la gráfica $h(x)$, ¿qué sucede con la gráfica si x toma valores entre 0 y 1?

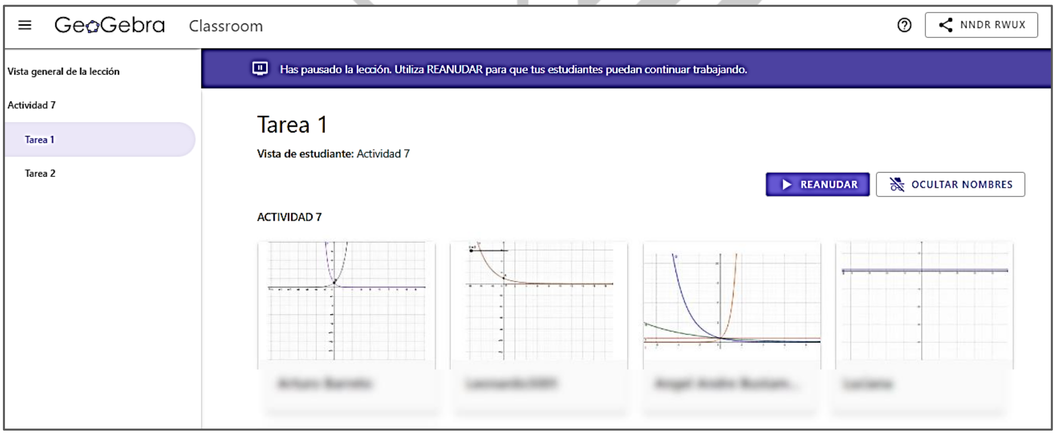
d) ¿A qué será similar la gráfica de $y = 2^{-x}$? (Grafique e interprete de otra forma y explique cómo consiguieron la respuesta)

e) Observando las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿puede determinar donde se da la intersección con el eje x y el eje y?

f) Luego de observar las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿las funciones pueden valer 0?

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta

Figura 67. Clase creada en GeoGebra Classroom. Actividad 7



Ítems a), b) y c)

Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes grafiquen correctamente las funciones $f(x)$ y $h(x)$ haciendo uso de *deslizadores*. Tal como se presenta en su regla de correspondencia, durante los tres ítems se espera que los estudiantes identifiquen el comportamiento de la gráfica de la forma $f(x) = b^x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$. Cada ítem está diseñado para que los estudiantes analicen distintos comportamientos cuando b (la base) cambia de valores negativos, positivos y cero. Este ordenamiento se puede observar en la siguiente tabla.

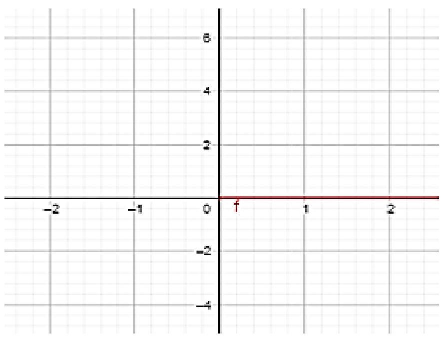
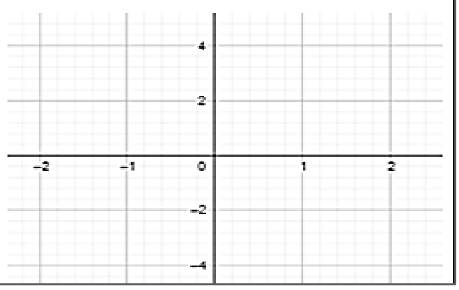
Tabla 45. Ítems a), b) y c) de la Actividad 7

Ítem	Con respecto a la función	Qué sucede con la gráfica si
a)		a toma valores negativos
b)	$f(x) = a^x, si -5 < a < 5$	A toma valores igual a 1 y a -1
c)		A toma valores en 0 y 1

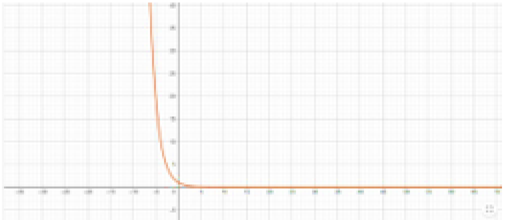
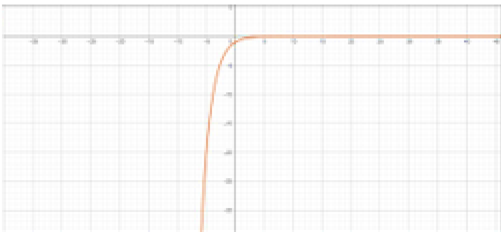
Descripción del Equipo 1

Figura 68. Justificación a los ítems 7 a), b) y c) en el Equipo 1

Ítem a)

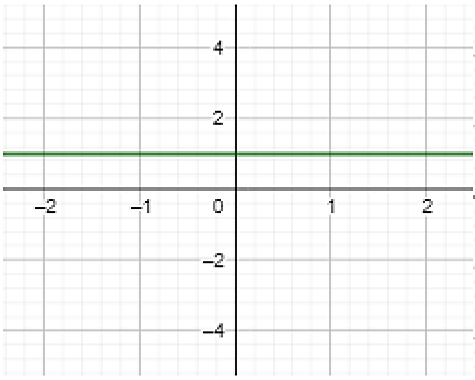
Explique:	Gráfica:
Si x toma valores negativos, la gráfica desaparece incluyendo sus valores. $f(x) = a^x$ $\rightarrow (-0.3)^x$	 

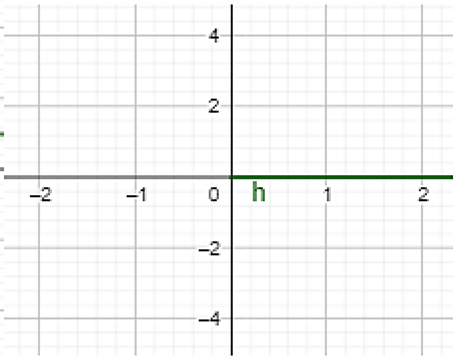
Ítem b)

Explique:	**Gráfica:**
Si a es igual a 1 el deslizador te funciona de manera positiva **si es igual a -1 l deslizador te funciona de manera negativa**	 

Ítem c)

Si x toma valores entre 0 y 1 la gráfica en valor 0 se mantendrá sólo en el eje X y si está en el valor 1 la gráfica aparecerá como una recta.

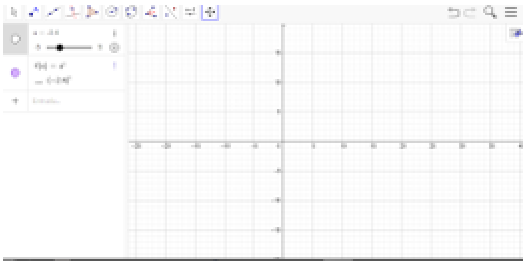




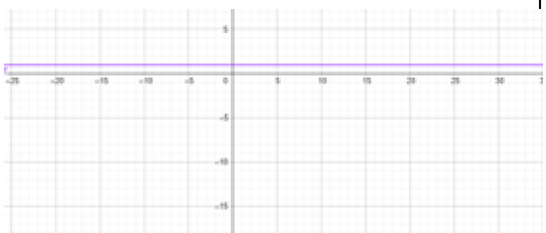
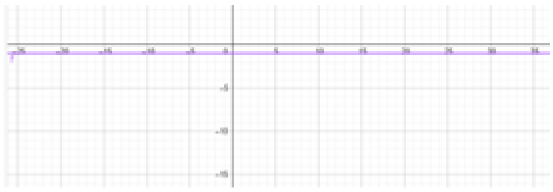
Descripción del Equipo 2

Figura 69. Justificación a los ítems 7 a), b) y c) en el Equipo 2

Ítem a)

Explique:	Gráfica:
Cuando X toma valor negativo la gráfica desaparece	

Ítem b)

Explique:	Gráfica:
lo que sucede es que si en f(x):**a** es reemplazado por **1** la recta se ubica en el eje Y en **1** y si a es reemplazado por **-1** la recta se ubica más abajo en **-1.**	**1**  **-1** 

Ítem c)

Que si x es reemplazado por 1 ,la respuesta es el mismo numero osea 1; y si es reemplazado por 0 queda como 1 elevado al 0 pero hablando de la gráfica no cambia nada.

Descripción de ambos equipos

El trabajo del Equipo 1 y 2 fue de socialización entre los integrantes, cada uno de ellos interpretaba la variación de la función con ayuda del deslizador. Para darle más peso a sus fuerzas y a sus razonamientos consideraron argumentar y colocar evidencias del GeoGebra de lo que mencionan en la ficha de trabajo

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 46. Actividad 7 a), b) y c) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Evaluar la función exponencial			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto
Ambos equipos	**I**	Deslizador	Identificar la variación de la gráfica de los tipos de interés	Gráfica función exponencial
	II	Vista gráfica del GeoGebra	Identifican	Orientación de la función exponencial

Los esquemas preexistentes de la variación de una función permitieron que las evidencias de ambos equipos sean muy similares. Con ayuda del comando *deslizador* pudieron considerar adecuadamente la variación de una función cada vez que se aumenta o disminuye un número del elemento principal de la función. En los tres ítems respondieron de manera correcta, interpretaron correctamente la variación de la función y no se observaron ninguna dificultad en el razonamiento. Por lo que se puede decir que la gráfica de la función exponencial tiene transparencia suficiente en esta actividad por lo generado en los partidos siguientes. Y con relación al modelo SAI, podemos estar de acuerdo lo dicho por Trouche (2004), donde menciona que la gráfica de la función y el deslizador se encuentran en el estadio de descubrimiento y la vista gráfica del GeoGebra se encuentra en el estadio de personalización. Con dichos ítems se profundizó propiedades principales de la función exponencial en cuanto a los valores que puede tomar la base puesto que esta posee ciertas restricciones.

Ítem d)

Análisis a priori

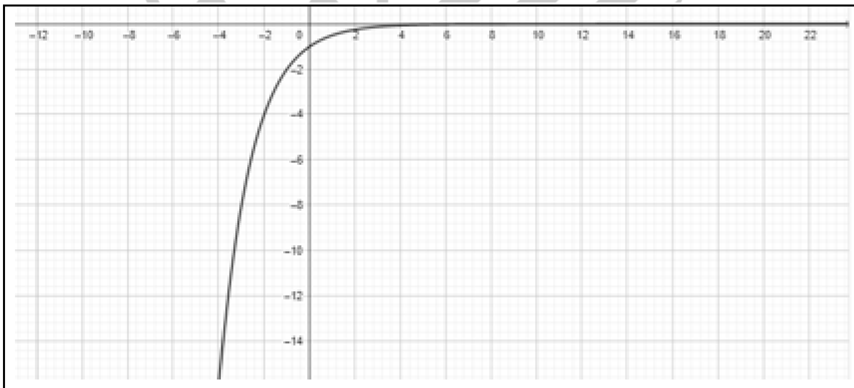
En este ítem los estudiantes grafican otro tipo de función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ pero ahora donde el exponente de la función exponencial tendrá exponente negativo en todo momento. Se espera que los estudiantes entren en conflicto negativo y descubran a que dicha función es equivalente a una función presentada en el ítem a) Actividad 7. En la interacción con el artefacto, se espera que hagan uso de la barra de entrada en la vista algebraica y explique al requerimiento encomendado.

Descripción de ambos equipos

Figura 70. Actividad 7-d. Equipo 1

La gráfica de $y = 2^{-x}$es similar a las gráficas $f(x) = a^x$ y $h(x) = b^x$debido a que las dos alcanzan una función exponencial donde contienen el mismo exponente de x.
Además encontramos la respuesta manipulado los destiladores de $f(x) = a^x$ y $h(x) = b^x$ donde coincidieron las gráficas con $y = 2^{-x}$.

Figura 71. Actividad 7-d. Equipo 2



Es una función algebraica de interés compuesto

Los estudiantes de ambos equipos decidieron graficar dicha función exponencial para luego dar respuesta si puede ser equivalente o similar a otra función exponencial. El equipo 2 solo optó por decir que pertenece a una función de interés compuesto, mientras que el equipo 1 planteó un argumento que involucra el conocimiento teórico del tema y el funcionamiento de la propiedad del *deslizador.*

Análisis a posteriori de ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 47. Actividad 7e) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Gráfica de dos puntos**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos equipos	**I**	Deslizador	Identificar la variación de la gráfica	Gráfica función exponencial
	II	Barra de entrada	Construir la gráfica	Grafica de la función 2^{-x}

Por medio de la representación gráfica anterior, los estudiantes del Equipo 1 pudieron encontrar la equivalencia a la función $f(x) = 2^{-x}$ al trazar el deslizador de la gráfica anterior y comprobar la gráfica que dicha función originaba. Mientras que, en el otro equipo, presentaron dificultades debido a la gráfica que presentan en su ficha, el cual no representa a la función $f(x) = 2^{-x}$. Además de ello, con este ítem se da a conocer el concepto de una función exponencial con exponente negativo el cual hace que mención a la contracara de una función exponencial habitual.

Ítem e) y f)

Análisis a priori

En estos dos últimos ítems se requiere trabajar con las dos funciones exponenciales iniciales con el fin que determinen la intersección que estas gráficas de funciones provocan cuando llegan a cruzarse. Se espera que los estudiantes identifiquen otras de las propiedades generales de la función exponencial cuanto se encuentra en la forma $f(x) = b^x$.

Descripción de ambos equipos

Figura 72. Actividad 7-e) y f) del equipo 1

e) Observando las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿Puede determinar dónde se da la intersección con el eje x y el eje y?

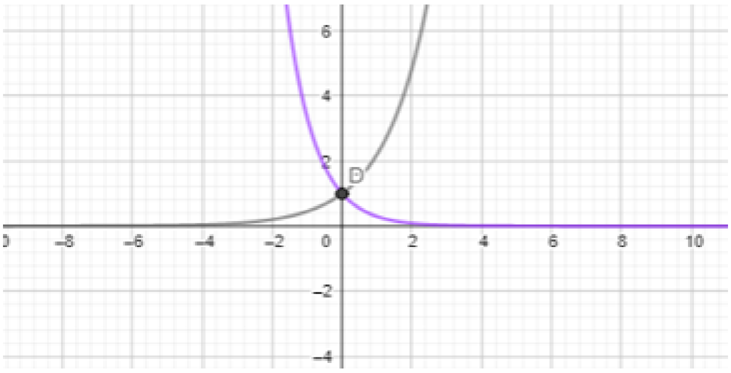
eje y (1)

f) Luego de observar las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿las funciones pueden valer 0? **(es decir y = 0 , se pueda dar)?**

Las funciones $f(x) = a^x$ y $h(x) = b^x$ si pueden valer 0 ya que serían visibles en el eje X.

Figura 73. Actividad 7-e) y f) del equipo 2

e) Observando las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿puede determinar donde se da la intersección con el eje x y el eje y? **(pongan en que par ordenado intersecan)**



D = Interseca(h, f, (0, 1))
→ (0, 1)

f) Luego de observar las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿las funciones pueden valer 0? **(es decir y = 0 , se pueda dar)?**

y=0 solo se queda en el eje X.

Los estudiantes de ambos equipos leen el enunciado del ítem e) y empiezan a graficar en su espacio de trabajo. En ella, observan que sí existe una intersección entre las gráficas, para ello, el Equipo 1 hizo uso de la opción *intersección* y el equipo 2 solamente la hizo uso de la opción *gráfico de puntos*. Finalmente, en la resolución del ítem f) dieron un argumento sin algún tipo de comprobación por lo que se debería trabajar dichas características de la propiedad de la función exponencial

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como involucrados directos del modelo SAI, se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 48. Actividad 7(e) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Gráfica de funciones exponenciales			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto

Ambos equipos	**I**	Vista algebraica	Identificar	Regla de correspondencia
	II	Barra de entrada	Construir la gráfica	Grafica de la función 2^{-x} y si y=o

Sobre el ítem e) los estudiantes de los dos equipos identificaron sin ninguna dificultad la intersección en el cruce de las dos funciones sin importar la variación de la base que estos sean provocados por los deslizadores puesto que este presenta una *restricción de intencionalidad* por la transformación de las gráficas f(x) y h(x). En cuanto a la vista algebraica que varía con los deslizadores podemos decir que hasta el momento presenta demasiada transparencia para los estudiantes y para la actividad. En contraposición a esto último con respecto al ítem f), ambos equipos no pudieron dar respuesta correcta y/o adecuada al ítem, podríamos decir que la regla de correspondencia en cuanto queremos darle un valor de *y* en la función exponencial aún no presenta transparencia con los estudiantes. Ahora bien, hasta la presente actividad, la gráfica de la función exponencial se encontraría en un estadio de descubrimiento y la vista algebraica y gráfica en el estadio de personalización.

Análisis de la Actividad 8

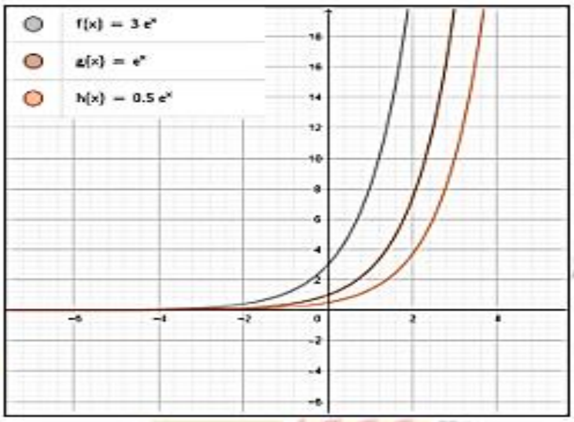
En esta actividad esperamos que los estudiantes sigan instrumentalizando la función exponencial con las opciones del Zoom y rectas de la barra de herramientas para expresar la asíntota horizontal de la forma y = a, donde *a* corresponde a aquel valor que se aproxima a la gráfica con relación al eje Y pero que nunca llega a intersecar. Asimismo, esperamos que los estudiantes interpreten la asíntota cuando éste se dirige al menos infinito o en más infinito según la base de la función exponencial, de modo que si es mayor que 1 determinarán que la función tiende ir hacia la izquierda, por el contrario, si se encuentra esté entre 0 y 1, la función tiende ir hacia la derecha.

Tabla 49. Actividad 8

ACTIVIDAD 8

Temática: Determinar la función de la asíntota horizontal en las funciones exponenciales

En el archivo Actividad_8.ggb se presenta la siguiente gráfica con las siguientes funciones:



Luego de analizar las gráficas en equipo determinen lo siguiente:

a) Indiquen las diferencias y similitudes que pueden encontrar en las gráficas

Diferencias	*Similitudes*
•	•

b) Responda: ¿en algún momento las gráficas intersecan con el eje x? ¿cuál sería la razón? ¿existe alguna recta imaginaria que impida ello? Fundamenten.

c) En el mismo archivo grafiquen la recta $y = 0$ (personalice con otro color al predeterminado por el GeoGebra) y analicen nuevamente que suceden en relación con las gráficas:

d) Indiquen la función de la asintota en las gráficas de funciones

e) En el mismo archivo grafiquen una función $q(x) = e^x + k$, donde k puede ser positivo o negativo

f) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte e) y determinen la asintota de la función

Proceso de construcción de la gráfica de $q(x)$ usando comandos del GeoGebra

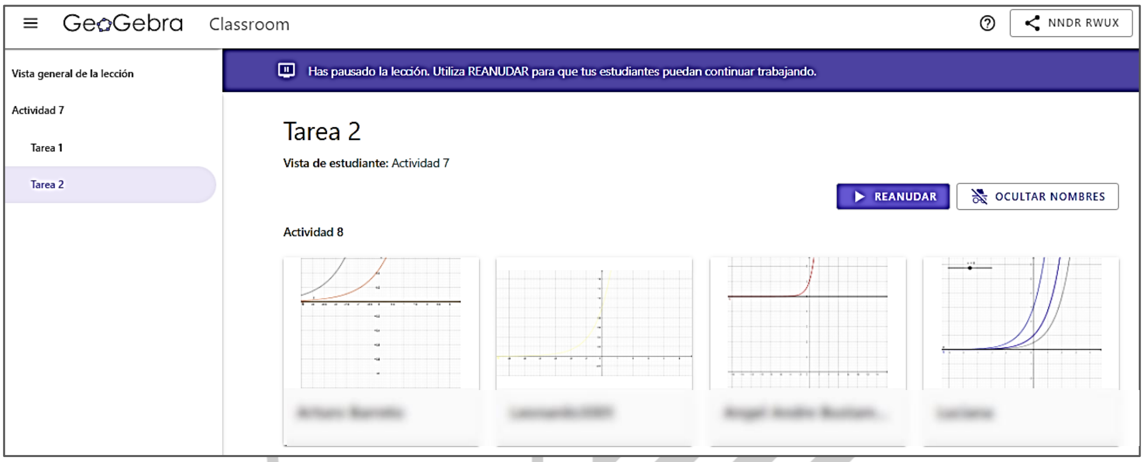
Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "Archivo > Guardar" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

Ítem a) y b)

Análisis a priori

Los estudiantes interactúan con las gráficas presentadas en el espacio creado del GeoGebra Classroom con la finalidad que puedan interpretar la variación de la función exponencial en su forma natural $f(x) = e^x$. En el recuadro presentado se espera que los estudiantes logren identificar diferencias y similitudes entre las gráficas, posterior a ello, analizan y fundamentan si las gráficas logran intersecar al Eje X. En ello, se espera como respuesta que existe "un motivo" que impide la intersección con el eje, por lo que los estudiantes hacen uso del Zoom de la gráfica, del comando *desplaza gráfica* y/o la opción Desplaza Vista Gráfica intersección ya que hasta el momento de la actividad ambos equipos se encuentran instrumentados respecto a la opción "Zoom", "intersección" porque lograron determinar las tareas anteriores sin dificultad.

Figura 74. Espacio creado en GeoGebra Classroom para la Actividad 8



Descripción del equipo 1

Figura 75. Resolución de la Actividad 8 a) y b)

a) Indiquen las diferencias y similitudes que pueden encontrar en las gráficas

Diferencias	*Similitudes*
• *Diferentes puntos de intersección con el eje "y"* • *Diferentes valores de x* • *Diferentes inicios de la curvatura.*	• Son funciones constantes • Mismo valor de la asíntota de y = 0

b) Responda: ¿en algún momento las gráficas intersecan con el eje x? ¿Cuál sería la razón? ¿existe alguna recta imaginaria que impida ello? Fundamenten.

Las gráficas no llegan a interceptar el eje "x" ya que hay una asíntota que hace un espacio entre las gráficas y el eje, esta recta es "imaginaria" pero se calcula observando donde termina la curvatura de la función y comienza a ser una función constante.

Con relación al ítem a) Observamos que los estudiantes actuaron acordes a lo esperado, comprendiendo inmediatamente la orientación de las gráficas, aunque en un inicio dudaron mucho en definir las similitudes puesto que mayormente observaban diferencias por la posición que se encuentra las gráficas. Para dar respuesta a las similitudes tuvieron que usar el comando Zoom del GeoGebra y observar la parte decreciente de las funciones con relación al eje X. Luego, con relación al ítem b) los integrantes consignan juntos que ninguna gráfica llega a intersecar al eje X por lo que fundamentan una posibilidad que justifiquen la no intersección.

Descripción del equipo 2

Figura 76. Resolución de la Actividad 8 a) y b**)**

a) Indiquen las diferencias y similitudes que pueden encontrar en las gráficas

Diferencias	***Similitudes***
• *diferentes asíntotas*	• todos cruzan por el eje X

b) Responda: ¿en algún momento las gráficas intersecan con el eje x? ¿cuál sería la razón? ¿existe alguna recta imaginaria que impida ello? Fundamenten.

No pueden intersecar con el eje x ya que una recta imaginaria lo impide

Con relación al ítem a) los estudiantes solamente detectaron las diferencias y similitudes con relación a la intercepción del eje X. por lo que se apreció en su trabajo en conjunto, no había consenso en cuanto al concepto que habían completado en su ficha de trabajo. Por otro lado, con el ítem b) los estudiantes hacen uso de una recta para determinar algún punto de intersección de la función exponencial con la recta creada. Usaron la opción recta que iba sobrepuesta al eje X y posterior a ello acordaron que debe ser invisible puesto que no se aprecia en ningún momento.

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 50. Resolución de los ítems 8 a), b) y c) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Gráficas de función exponencial natural**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Vista algebraica	Identificar	Funciones exponenciales natural
Solo equipo 1	**II**	Opción Zoom	Ampliar las gráficas	Plano cartesiano
Solo Equipo 2	**III**	Barra de herramienta	Construye una recta sobre el eje X	Función f

Con relación al Equipo 1 los estudiantes usaron la opción zoom para determinar con mayor seguridad las gráficas de las funciones por lo que nos muestra que la función que adquirió esta opción se sigue conservando cuando desarrollaron la Actividad 7. Se evidenció que el diseño de las gráficas de las funciones exponenciales presenta una restricción de estructuración de acción debido a que el propio diseño se consideró características que direccionan las acciones de los participantes hacia el conocimiento de la asíntota de la función exponencial. También, luego de analizar las gráficas con relación a las respuestas en el ítem b), podemos ver cómo llegan a reproducir un nuevo concepto dentro de la función exponencial, posiblemente debido a la ayuda de la opción Zoom ya que menciona que esta es una *recta "imaginaria" que se calcula observando donde termina la curvatura de la función y comienza a ser una función constante*. Si retomamos las acciones anteriores de los participantes del equipo 1, podríamos inferir que la opción Zoom se va encontrando en un segundo estadio de instrumentalización. Si bien aún no delimitan la función de la asíntota, estaríamos dentro de la aparición de un nuevo esquema en los estudiantes.

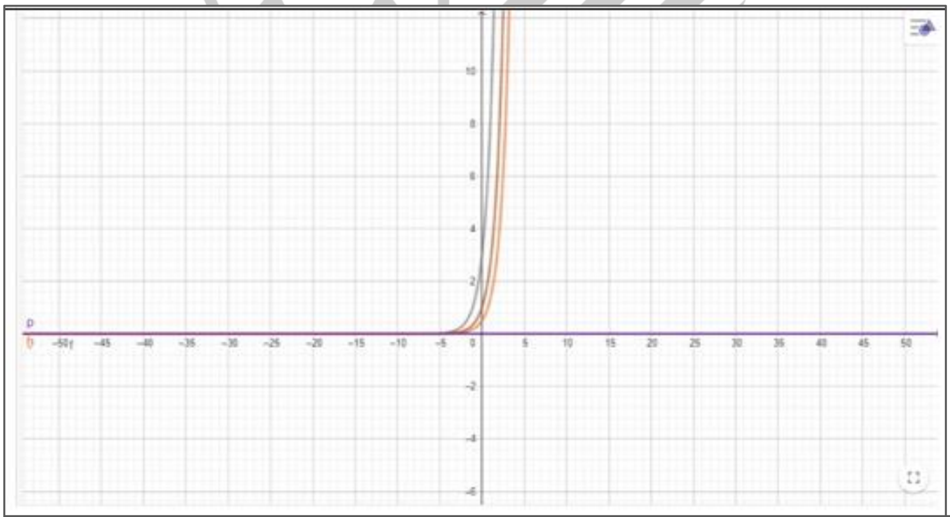
Con relación al Equipo 2, presenta ideas contrarias con relación a las dificultades y similitudes que ellos consideran ya que no se relaciona con el concepto de asíntota. Aun así, con relación a la respuesta en el ítem b) podemos rescatar que la función de la opción “recta que pasa por dos puntos” (realizado sobre el eje X) sigue estando conservada por el equipo, por tanto, esta opción vista como artefacto se encuentra en un segundo estadio de instrumentalización.

Ítem c) y d)

En estos dos ítems complementarios se les pide a los estudiantes graficar la recta $y = 0$, por lo que se espera que los estudiantes puedan reconocer que dicha función corresponde a la función de la asíntota horizontal, así puedan construir y adecuar sus esquemas de acción instrumentada. Luego de graficar, deberán justificar alguna relación entre la función de la asíntota con las gráficas iniciales.

Descripción del Equipo 1

Figura 77. Representación y justificación de la función asíntota por parte del Equipo 1



d) Indiquen la función de la asíntota en las gráficas de funciones
La función de la asíntota en las gráficas de funciones es $y = 0$

Para la gráfica de la función y = 0 hicieron uso de la barra de entrada en la vista algebraica, posterior a ello los estudiantes quisieron diferenciar el color de la gráfica de la asíntota por lo que personalizaron el objeto usando la opción de Propiedades. Asimismo, en equipo indicaron que por la forma de la recta esa posiblemente deba ser la asíntota.

Descripción del Equipo 2

Figura 78. Representación y justificación de la función asíntota por parte del Equipo 2

c) En el mismo archivo grafiquen la recta $y = 0$ (personalice con otro color al predeterminado por el GeoGebra) y analicen nuevamente que suceden en relación con las gráficas:

En relación con las gráficas no sucede nada solo se forma una recta en el eje X.

d) Indiquen la función de la asíntota en las gráficas de funciones

Creemos que la función de la asíntota es aquella realizamos en la anterior pregunta o sea y = 0

El equipo 2 grafica la función y = 0 pero no descubre alguna influencia o relación que dicho objeto matemático podría aplicar a las gráficas de funciones. Asimismo, por lo que había replicado la idea de sobreponer una recta en el eje Y, consideraron que la nueva función representaría la gráfica de la asíntota horizontal.

Análisis a posteriori para ambos equipos

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI se toma en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 51. Resolución de los ítems c) y d) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Construcción y reconocimiento de la asíntota horizontal			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Expresión y = 0	Escribe la regla de correspondencia de la asíntota	Función de la asíntota
	II	Vista algebraica	Identifican relación de las expresiones $f(x), g(x)\ y\ h\ (x)$ con la asíntota	Plano cartesiano

Ninguno de los equipos presenta dificultades para representar la gráfica de la función $y = 0$ además de intuir perfectamente que dicha recta representaría la recta imaginaria, es decir, la asíntota de la función exponencial. Aun así, de acuerdo con el propósito de la actividad indicaríamos según Trouche (2004) que dicha regla de correspondencia de la función $y = 0$ se encuentra en un estadio de descubrimiento puesto que no pudieron reconocer del todo, posterior a ello los estudiantes quisieron diferenciar el color de la gráfica de la asíntota por lo que personalizaron el objeto usando la opción de Propiedades. Finalmente, se puede entender que cuando la posición de la función exponencial se encuentra en su forma base, es decir, $f(x) = e^x$, estos pueden interpretar sin problemas las asíntotas, podría generar nuevos esquemas sobre una de las otras propiedades de la función exponencial donde la asíntota forma parte de su representación gráfica, lo que da indicios a una construcción que permitirá a los estudiantes, en próximos conocimientos, al aprendizaje del concepto de límite de una función.

Ítem e) y f)

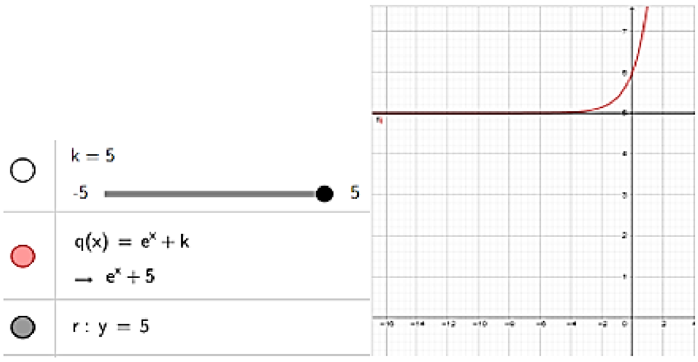
Análisis a priori

Durante estos dos últimos ítems, los estudiantes grafican una función exponencial de la forma $f(x) = e^x + k$, donde el valor de k pasa por decisión del equipo, pero no puede ser cero (0). Se espera que los estudiantes identifiquen el cambio que adquiere la función exponencial como por ejemplo el cambio de la función de la asíntota y el cambio en la intersección de la función exponencial con el eje Y, reconociendo que la asíntota de la función exponencial depende de la representación gráfica de la función. Asimismo, con relación al artefacto GeoGebra, se espera que los estudiantes logren un segundo estadio de instrumentalización cuadro grafiquen la nueva función.

Descripción del trabajo del Equipo 1

Figura 79. Actividad 8-e) y f) desarrollada por el equipo 1

e) En el mismo archivo grafiquen una función $q(x) = e^x + k$, donde k puede ser positivo o negativo



f) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte e) y determinen la asíntota de la función **para un valor cualquiera de k (excepto 0)**

Proceso de construcción de la gráfica de $q(x)$ usando comandos de GeoGebra

Los pasos que utilizamos en la parte "e)" es copiando cada número del ejemplo de la parte "e)" $q(x) = e^x + k$ utilizando la calculadora del GeoGebra, luego cambiando el color y utilizando el deslizador de k, me ayude para poder encontrar un valor donde me de la asíntota, este valor es $k = 5$ donde su asíntota seria $y = 5$.

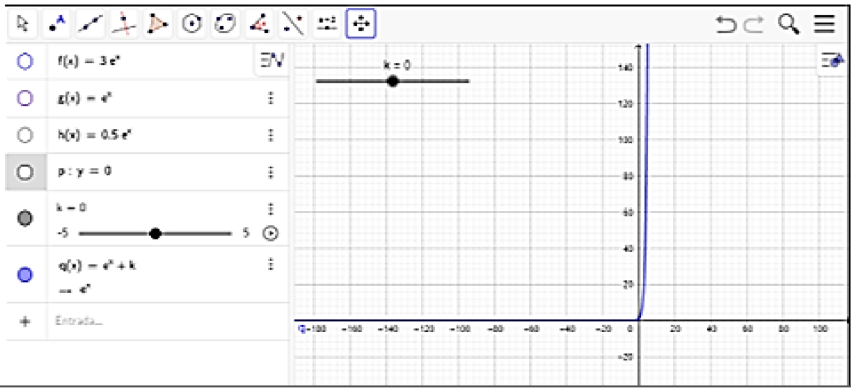
Descripción del trabajo del Equipo 2

Figura 80. Actividad 8-e) y f) desarrollada por el equipo 2

f) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte e) y determinen la asíntota de la función **para un valor cualquiera de k (excepto 0)**

Proceso de construcción de la gráfica de $q(x)$ usando comandos del GeoGebra

lo que hice es utilizar la calculadora y copiar lo indicado.



Sobre los estudiantes del Equipo 1, ellos usaron la barra de entrada para conseguir la gráfica $f(x) = e^x + k$, en un inicio lo desarrollaron usando como componente elevado el símbolo “ ^ ”, pero tuvieron complicaciones. A continuación, notaron que se podría mejorar con el uso de la calculadora, lo cual hizo que en dicha construcción de la regla de correspondencia aparecía un deslizador *k*, por lo que los estudiantes deberían decidir con que valor de *k* iban a trabajar. Posterior a ello, redactan su secuencia en base a lo sucedido y a lo que representa el valor de *k* asignado. Ahora bien, sobre los estudiantes del Equipo 2, aplicaron la misma idea que los del Equipo 1, sin embargo, dudaban en lo representado en la vista gráfica por lo que al final solamente dejaron su gráfica cuando el valor de *k* es 0.

Análisis a posteriori para ambos equipos

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 52. Resolución de los ítems c) y d) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Construcción de una nueva función exponencial			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto

Ambos Equipos	**I**	Barra de entrada	Escriben en el comando la función exponencial de forma $f(x) = e^x + k$	Gráfica de la función exponencial
	II	Deslizador	Representar una regla de correspondencia dándole un solo valor a k	Valor de k en la gráfica de la función exponencial
	III	Regla de correspondencia de la nueva función	Construye la representación gráfica de la función $e^x + k$	Gráfica de la función exponencial

Observamos que los estudiantes de cada equipo movilizaron esquemas de uso del comando de la *barra de entrada* con relación a la función exponencial y esquemas de uso con relación a la formación de una función cuando influyen deslizadores, resultado de las interacciones de los estudiantes en el desarrollo de la Actividad 3, y dado que las funciones adquiridas por el comando *deslizador* se conservaron para una misma acción posterior, podríamos afirmar que dicho comando se encuentra en un segundo estadio de instrumentalización. Ahora bien, sobre la sintaxis realizada en la obtención de la función $f(x) = e^x + k$ a partir del uso de la calculadora del GeoGebra, podemos decir que esta es suficientemente transparente en la actividad. Creemos también que los tres instrumentos declarados en la Tabla 49 revela resultados de las acciones de los estudiantes el cual las restricciones de las modalidades de existencia ya han sido derribadas, comprendidas y administradas por parte de los estudiantes. Finalmente, ninguno de estos instrumentos se encontraría en un estadio de descubrimiento desde la perspectiva de Trouche (2004). Y que los estudiantes del equipo 1, han sido capaces de reconocer que dicho desplazamiento influenciado en la función exponencial formaría parte de dicho número, el cual, la gráfica intenta intersecar, pero nunca llega, por lo que también lo conocen como asíntota. De esta forma, pudieron determinar que la asíntota a su gráfica es de y = 5.

Análisis de la Actividad 9

La Actividad 9 corresponde a la última actividad del trabajo de investigación el cual fue desarrollado en dos partes debido a la longitud de tareas pensadas para el logro de los objetivos. En esta primera parte de la actividad, esperamos que los estudiantes representen gráficamente una función exponencial cuando en ella ocurre desplazamientos tantos horizontales como verticales, expresado de la forma $f(x) = b^x \pm k$ y $f(x) = b^{x \pm h}$, respectivamente. De acuerdo con el último ítem trabajado en la actividad anterior, creemos que la secuencia siguiente no presentarán dificultades en entender cada uno de los ítems. Se espera también que los estudiantes instrumentalicen sin problemas los comandos barra de entrada, deslizador y recta que pasa por dos puntos a partir de las tareas encomendadas. De manera que siguiendo la secuencia de Trouche (2004) esperamos el cambio de distintos escenarios de un escenario de descubrimiento y selección de funciones relevantes a un escenario de personalización donde los sujetos adapta el artefacto de acuerdo a sus necesidades. Esto último con relación a los comandos/herramientas del GeoGebra mencionados. Finalmente, en la Figura 81 se presenta la clase creada en GeoGebra Classroom

Tabla 53. Actividad 9

ACTIVIDAD 9

Temática: Interpretar el desplazamiento vertical y horizontal de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x \pm k$ y $f(x) = b^{x \pm h}$, respectivamente al variar los parámetros k y h

Desplazamiento horizontal

a) En el archivo Actividad_9a.ggb represente la gráfica $f(x) = 3^x + a$, si $-2 \leq a \leq 2$, de tal forma que se muestre el desplazamiento de la función

b) Del gráfico obtenido en a) analicen que representa el valor de a y como ayuda el deslizador a comprender el desplazamiento de la función

c) Del gráfico obtenido en a) completen el cuadro con algunos valores de a

Función: $f(x) = 3^x + a$	**Valor de a**	**Interpretación del desplazamiento**

Desplazamiento vertical

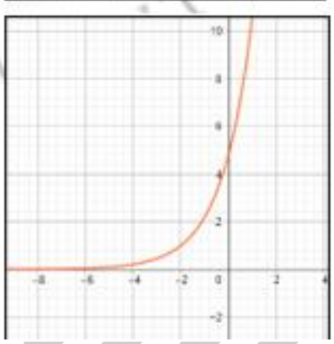
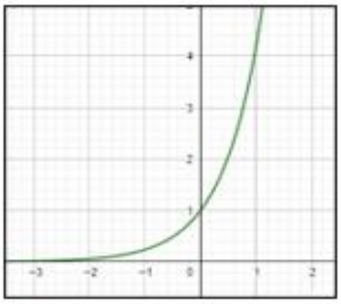
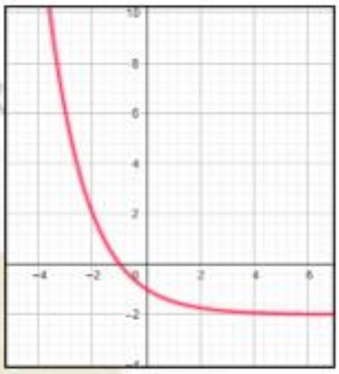
a) En el archivo Actividad_9a.ggb represente la gráfica $g(x) = 2^{x+k}$, si $-2 \leq k \leq 2$, de tal forma que se muestre el desplazamiento de la función

b) Del gráfico obtenido en a) escriban que representa el valor de k y como ayuda el deslizador a comprender el desplazamiento de la función

c) Del gráfico obtenido en a) completen el cuadro

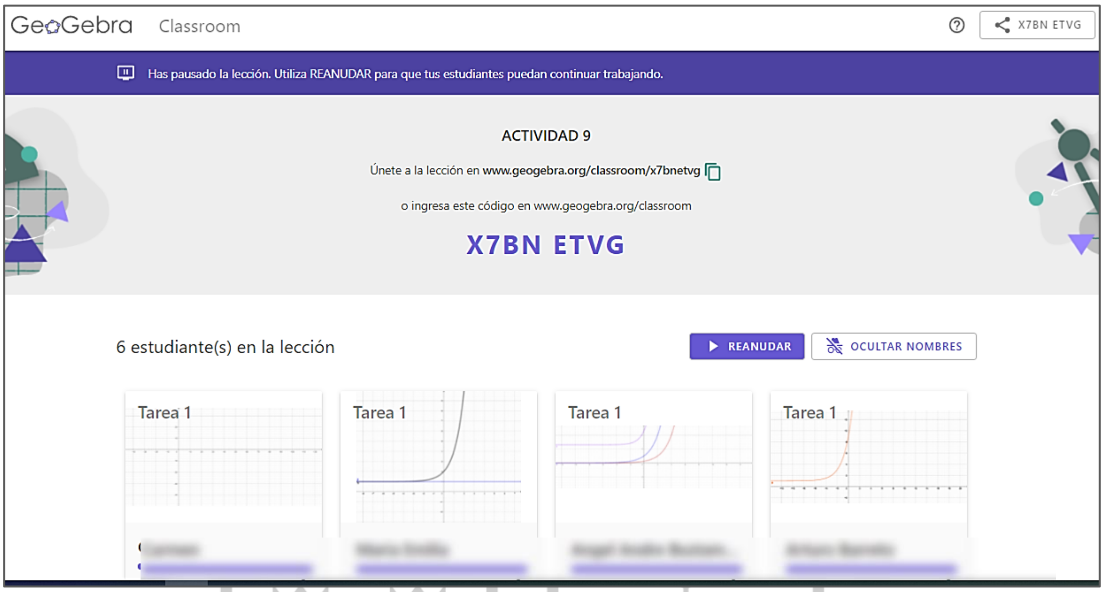
Función: $g(x) = 3^{x+k}$	**Valor de b**	**Desplazamiento**	**Asíntota horizontal**

d) En el GeoGebra efectúen transformaciones a la función $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2^x$ para determinar la relación de las funciones de la columna I con su grafica correspondiente de la columna II. A continuación, muestren las relaciones a través de flechas.

Columna I	Columna II
A. $y = 4g(x)$	
B. $y = 2f(x) + 1$	
C. $y = g(-x) - 2$	
D. $y = 2g(x + 2)$	

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta

Figura 81. Clase en GeoGebra Classroom para la Actividad 9



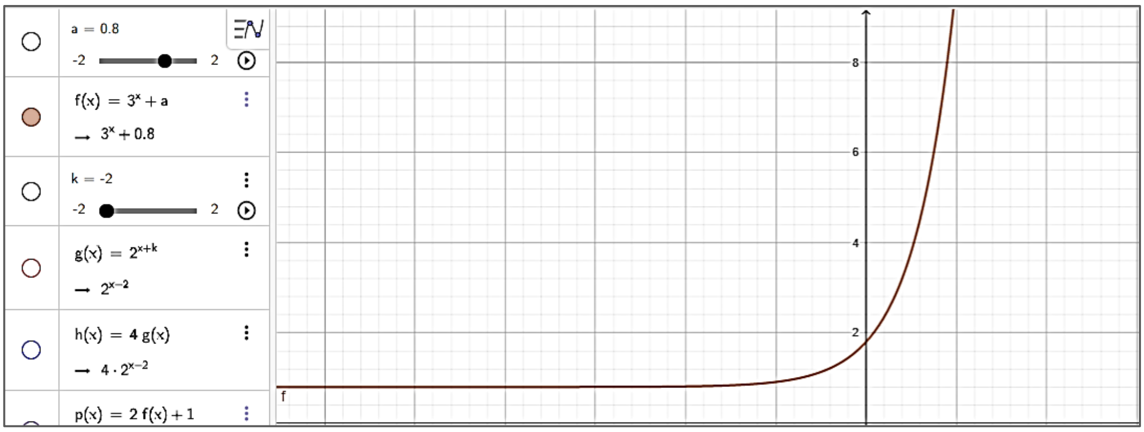
Ítem a) y b)

Análisis a priori

Estos dos primeros ítems están relacionados con el desplazamiento vertical de la función exponencial, por tanto, en el ítem a) se espera que los estudiantes grafiquen correctamente la gráfica $f(x) = 3^x + a$, sí $-2 \leq a \leq 2$. Se espera que los estudiantes pongan en acción sus esquemas de usos para que reconozcan que el valor de *a* representa un comando deslizador pero que tiene que estar en un intervalo de -2 a 2. Estos valores que se encuentran *a* deberán ser comprendido por los estudiantes como parte importante que origina el desplazamiento de una función exponencial

Descripción del Equipo 1

Figura 82. Resolución de la Actividad 9 – ítem a) y b) del Equipo 1



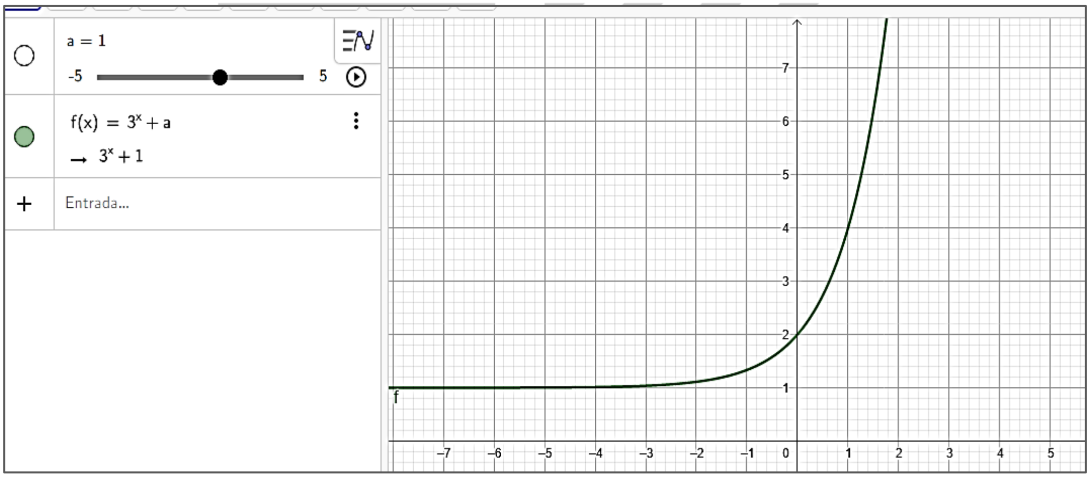
Los estudiantes usaron la barra de entrada para graficar la función exponencial $f(x) = 3^x + a$. En la gráfica construida uno de los integrantes se dio cuenta del intervalo del deslizador no era el adecuado, sino que era el predeterminado establecido por el GeoGebra. Luego de ello, los estudiantes en conjunto interpretaron lo que representa la variación de a y justificar como ayuda a comprender el desplazamiento de una función. Su redacción de dicho ítem se observa en la siguiente Figura.

Figura 83. Actividad 9 – ítem b del Equipo 1

Del gráfico "a)", el valor de "a" en la gráfica $f(x) = 3^x + a$ representa la cantidad de desplazamiento vertical de la gráfica ya sea para arriba o abajo del eje "x" .

Descripción del Equipo 2

Figura 84. Resolución de la Actividad 9 - a) y b) del Equipo 2



Los estudiantes usaron la barra de entrada para graficar la función exponencial $f(x) = 3^x + a$ y luego procedió a dar "Enter" para generar su grafica. En ella no se percataron del cambio de intervalo que debieron hacer en el comando *deslizador*, es así como mantuvieron el deslizador con el intervalo predeterminado por el GeoGebra. Luego de ello, los estudiantes en conjunto interpretaron lo que representa la variación de a y justificar como ayuda a comprender el desplazamiento de una función. Su redacción de dicho ítem se observa en la siguiente Figura.

Figura 85. Actividad 9 ítem b) del Equipo 2

Dependiendo el valor de ¨a¨ la gráfica cambia de posición

Análisis a posteriori de ambos equipos

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 54. Resolución de los ítems 9 a) y b) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Graficando función exponencial con desplazamiento**			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Barra de entrada	Escriben en el comando la función exponencial de forma $f(x) = 3^x + a$	Gráfica de la función
	II	Deslizador	Modificar el intervalo del deslizador *a*	Valor de *a* en la gráfica de la función
	III	Regla de correspondencia de la nueva función	Construye la representación gráfica de la función $3^x + a$	Gráfica de la función

Los equipos 1 y 2 pudieron movilizar como esquema de uso la formación de la expresión de una función exponencial con desplazamiento vertical al graficar la regla de f: exponencial $f(x) = 3^x + a$. Sin embargo, solamente el equipo 1 pudo dar cuenta del nuevo objeto matemático a estudiar dentro de la función exponencial. Así lo podemos comprobar en la redacción presentada por el Equipo 1, donde menciona que el valor de *a* representa un desplazamiento vertical de la gráfica o bien hacia arriba o bien hacia abajo. En este momento podemos mencionar que los alumnos permanecen instrumentados con la idea de función exponencial en distintas posiciones pero que se encuentra en la fase de descubrimiento con respecto al deslizador *a*. Por último, sobre la regla de correspondencia de la función no se evidencia restricciones de modalidad de existencia debido a que los estudiantes no presentan dificultades al usar las propiedades de la función exponencial cuando graficaban la función *f*.

Ítem c)

Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes comprueben cómo es la orientación del desplazamiento de la grafica $f(x) = 3^x + a$. Para ello, se espera que los estudiantes varíen el valor de *a* en un intervalo establecido y compartan sus resultados encontrados.

Descripción del Equipo 1

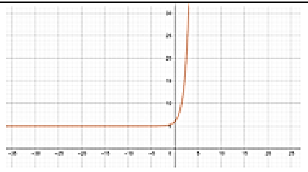
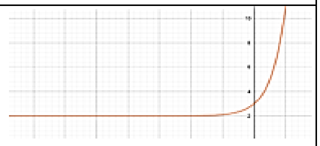
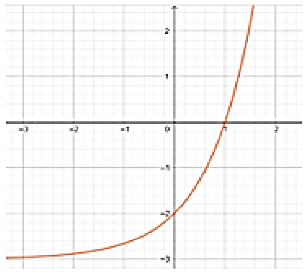
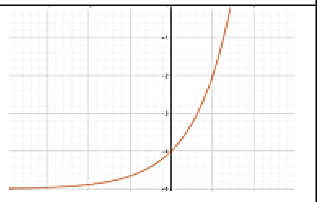
Figura 86. Actividad 9 – ítem c) desarrollada por el Equipo 1

Función: $f(x) = 3^x + a$	Valor de a	Interpretación del desplazamiento
$f(x) = 3^x + 2.7$	2.7	Su desplazamiento es de forma vertical hacia arriba
$f(x) = 3^x + 1.2$	1.2	Su desplazamiento es de forma vertical hacia arriba
$f(x) = 3^x + 4.7$	4.7	Su desplazamiento es de forma vertical hacia arriba
$f(x) = 3^x - 1.7$	-1.7	Su desplazamiento es de forma vertical para abajo del eje “x”

Los estudiantes amplían el intervalo del deslizador *a* y se proponen a determinar ciertos valores en conjuntos. Se escogió con un mayor rango de valores positivos en a y valores negativos solamente 1.

Descripción del Equipo 2

Figura 87. Actividad 9 – ítem c desarrollada por el Equipo 2

Función: $f(x) = 3^x + a$	Valor de a	Interpretación del desplazamiento
$f(x) = 3^x + a$	5	
$f(x) = 3^x + a$	2	
$f(x) = 3^x + a$	-3	
$f(x) = 3^x + a$	-5	

Los estudiantes del equipo redactan el cuadro a partir de su propia gráfica realizada en el ítem anterior. Además, en equipo, acordaron presentar evidencias gráficas en la parte de interpretación de desplazamiento.

Análisis a posteriori para ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 55. Resolución del ítem c) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Interpretando desplazamiento de una función exponencial			
	N°	Instrumento	Acción	Objeto

Ambos Equipos	**I**	Regla de correspondencia	Construye la representación gráfica de la función $3^x + a$	Gráfica de la función
	II	Deslizador	Modificar el intervalo del deslizador a	Valor de a en la gráfica de la función

Observamos que los estudiantes movilizaron esquemas de uso del comando deslizador, dados que actividades anteriores hicieron que la instrumentalización del comando se siga conservando. De las nuevas reglas de correspondencia de la función ocurrido con la variación de a, no se evidencia nuevamente restricciones de modalidad de existencia ya que no presentan dificultades al usar las propiedades de las reglas cuando las interpreta. Esto hace que las diversas reglas de correspondencias realizadas por ambos equipos tengan transparencias en esta actividad. Por último, en la interpretación del desplazamiento podemos decir que hay rastros en los integrantes del equipo 1 sobre la construcción de la noción de desplazamiento que está siendo instrumentado.

Ítem a1) y b1)

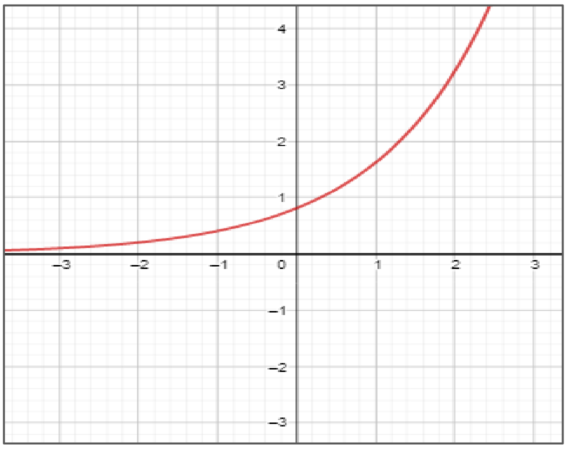
Análisis a priori

En estos dos ítems siguientes, hace referencia a otro tipo de desplazamiento aplicado en la gráfica de una función exponencial muy similar a lo realizado en los ítems a) y b). Se espera que los estudiantes traigan en acción los esquemas de usos realizados en los primeros ítems y determinar la gráfica $g(x) = 2^{x+k}$. El deslizador diseñado para los ítems permite que los estudiantes manipulen la función exponencial y su desplazamiento horizontal por encima del eje X.

Descripción del Equipo 1

Figura 88. Actividad 9 – ítem a1) y b1) desarrollada por el Equipo 1

El valor de "k" del gráfico $g(x) = 2^{x+k}$ representa la cantidad de desplazamiento de la gráfica en forma horizontal ya sea de derecha a izquierda y viceversa, pasando el eje "y"



Con respecto a los ítems (a1) y (b1), los estudiantes graficaron usando la barra de entrada del GeoGebra, similar a los dos primeros ítems, posterior a ello, redactaron en equipo la ficha de trabajo donde expusieron la relación que tiene el deslizador con respecto a la gráfica.

Descripción del Equipo 2

Figura 89. Actividad 9 – ítems a1) y b1) desarrollada por el Equipo 2

El valor de k hace que la gráfica se incline para arriba si es positivo y para abajo si es negativo

De acuerdo con la ficha de trabajo presentado por el equipo 2, no presenta la gráfica pedida en el ítem a1, pero sí hacen comentario sobre lo que sucede con el deslizador *k*. La redacción fue realizada de manera coordinada entre los integrantes de acuerdo a lo que genera en la representación gráfica pero no sostiene más que ello.

Análisis a posteriori para ambos equipos

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 56. Resolución de los ítems a1) y b1) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	Modelo SAI: Interpretando desplazamiento de una función exponencial			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Gráfica de la función $g(x) = 2^{x+k}$,	Construye la representación gráfica de la función 2^{x+k}	Gráfica de la función
	II	Deslizador	Modificar el intervalo del deslizador k	Valor de a en la gráfica de la función

Empezaremos con el Equipo 2, no se logró lo esperado como pasó con el ítem a) y b) por lo que sus esquemas de uso solamente fueron destinados en lo que ocasiona el deslizador *k*, sin embargo, en su redacción el equipo tampoco figura o comprende el papel del deslizador dentro del desplazamiento horizontal de la función exponencial. Entonces, los estudiantes presentaron dificultades y posiblemente se evidenciaron restricciones en la gráfica de la función $g(x) = 2^{x+k}$, Ahora bien, con relación al Equipo 1, los integrantes siguen instrumentando la función exponencial en cuanto al desplazamiento que este viene a ser afectado, por lo que se puede entender que la gráfica de la función exponencial ya no se encuentra en un estadio inicial (o de descubrimiento) sino en un estadio de personalización. Observamos también que los estudiantes relacionan claramente la función del comando deslizador con la gráfica de la función, por tanto, podríamos conectar que el deslizador es suficientemente transparente en la función f.

Ítem c1)

Análisis a priori

En este ítem se espera que los estudiantes comprueben cómo es la orientación del desplazamiento de la grafica $g(x) = 2^{x+k}$. Para ello, se espera que los estudiantes varíen el valor de *k* en un intervalo establecido.

Descripción del Equipo 1

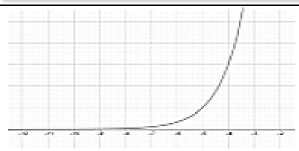
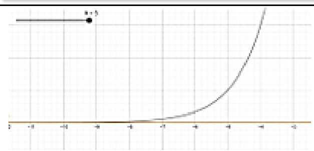
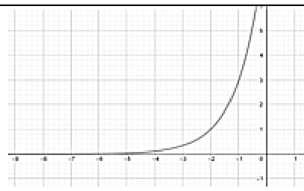
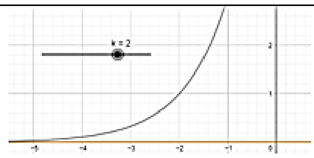
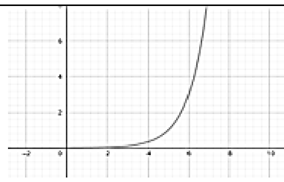
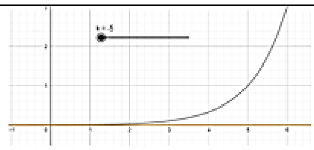
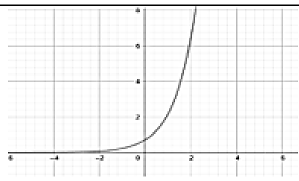
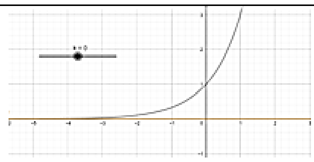
Figura 90. Actividad 9 – ítem c1) desarrollada por el Equipo 1

Función: $g(x) = 2^{x+k}$	Valor de k	Desplazamiento	Asíntota horizontal
$g(x) = 2^{x-1.4}$	-1.4	Su desplazamiento es de forma horizontal a la derecha pasando el eje "Y"	La asíntota es y = 0
d) $g(x) = 2^{x+6}$	6	Su desplazamiento es hacia la izquierda	Y= 0
$g(x) = 2^{x+1.2}$	1.2	Su desplazamiento es hacia la izquierda	Y=0
e) $g(x) = 2^{x-5}$	-5	Su desplazamiento es hacia la derecha	Y = 0

Los estudiantes estuvieron variando el valor de *k* para dar respuesta el desplazamiento que realiza la función exponencial. En la elección del valor utilizaron tanto valores negativos como positivos y consideraron que en todas las gráficas la asíntota permanece por lo que consideran una única función de la asíntota para todas las variaciones.

Descripción del Equipo 2

Figura 91. Actividad 9 – ítem c1) desarrollada por el Equipo 2

Función: $g(x) = 3^{x+k}$	Valor de b	Desplazamiento	Asíntota horizontal
$g(x) = 3^{x+k}$	5		
$g(x) = 3^{x+k}$	2		
$g(x) = 3^{x+k}$	-5		
$g(x) = 3^{x+k}$	0		

Los estudiantes del equipo variaron el valor de *k* para dar respuesta al desplazamiento de la gráfica de función exponencial. En su elección, similar al equipo 1, fue de unanimidad en escoger valores negativos y positivos. Por otra parte, en la elección de la asíntota, los estudiantes realizaron diversas rectas, distintas para cada función con variación.

Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 57. Resolución del ítem c1) (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Interpretando la variación del deslizador** k			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Gráfica de la función $g(x) = 2^{x+k}$,	Construye la representación gráfica de la función 2^{x+k}	Gráfica de la función
	II	Deslizador	Modificar el intervalo del deslizador *k*	Valor de *a* en la gráfica de la función
	III	Función lineal	Identifica la asíntota	Asíntota de g(x)

Los estudiantes movilizaron esquemas preexistentes de transformación de funciones, los cuales fueron reforzados con acciones de los estudiantes en las actividades previas a la función exponencial. Ahora bien, se puede decir que ambos equipos han podido interpretar que el valor de *k* da sentido a la función exponencial aún se encuentre afectada en un desplazamiento horizontal. Con relación a la vista gráfica del GeoGebra podemos decir que a esta instancia se encuentra en una fase de personalización puesto que lo utiliza de acuerdo a las necesidades propias del sujeto con la actividad. Esta premisa, se puede confirmar con las acciones vistas en el equipo 1 haciendo relación nuevamente con el valor de *k* y el desplazamiento horizontal de la función exponencial.

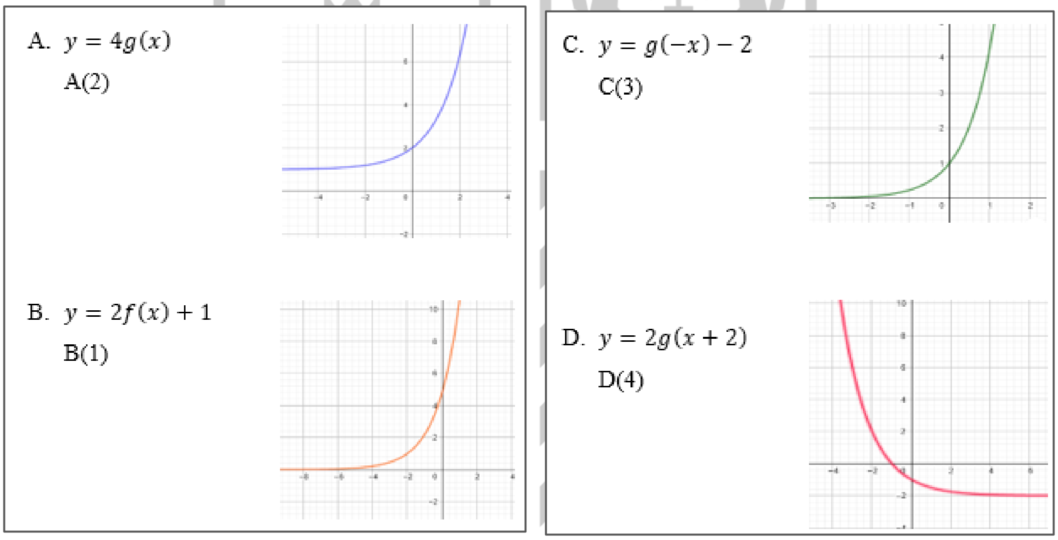
Ítem d)

Análisis a priori

En este último ítem lo que se espera de los estudiantes es consignar la noción de función a partir de la regla de correspondencia formada por las primeras funciones en los primeros ítems: las funciones $f(x) = 3^x, g(x) = 2^x$. Los estudiantes tendrán que relacionar la regla de correspondencia, por un lado, con la gráfica correspondiente que se presentan en otra columna. En este sentido, se espera que los estudiantes movilicen los esquemas de uso desarrollados en actividades previos.

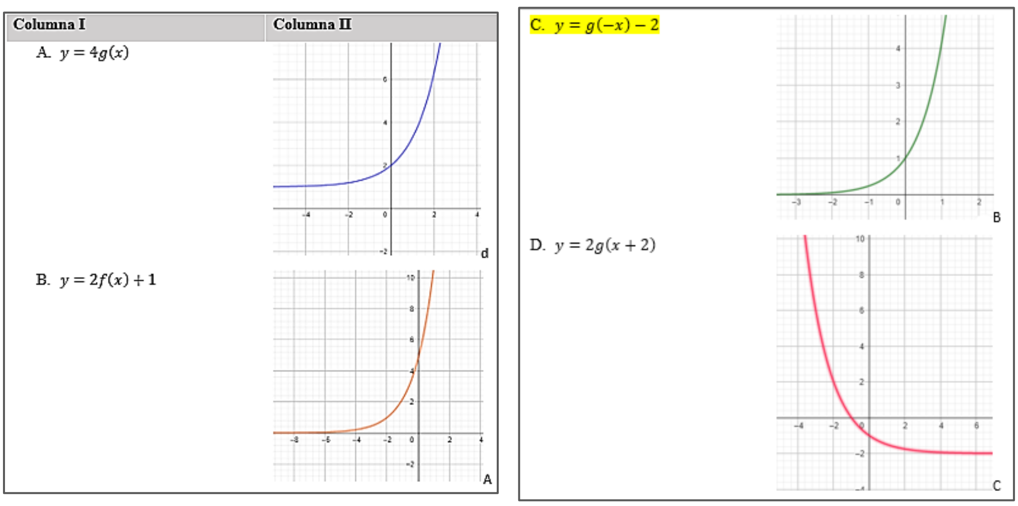
Descripción del Equipo 1

Figura 92. Actividad 9 – ítem d) desarrollada por el Equipo 1



Descripción del Equipo 2

Figura 93. Actividad 9 – d) desarrollada por el Equipo 2



En ambos equipos los estudiantes relacionaron correctamente en la ficha de trabajo la regla de correspondencia con la gráfica adecuada sobre las transformaciones presentadas en la primera columna. Para ello, ambos equipos manipularon el GeoGebra digitando en primer lugar la función f(x) y g(x) como base. Algunas de las evidencias se pueden observar en la Figura 94.

Figura 94. Evidencia del Equipo 1 sobre la actividad 9 (d)

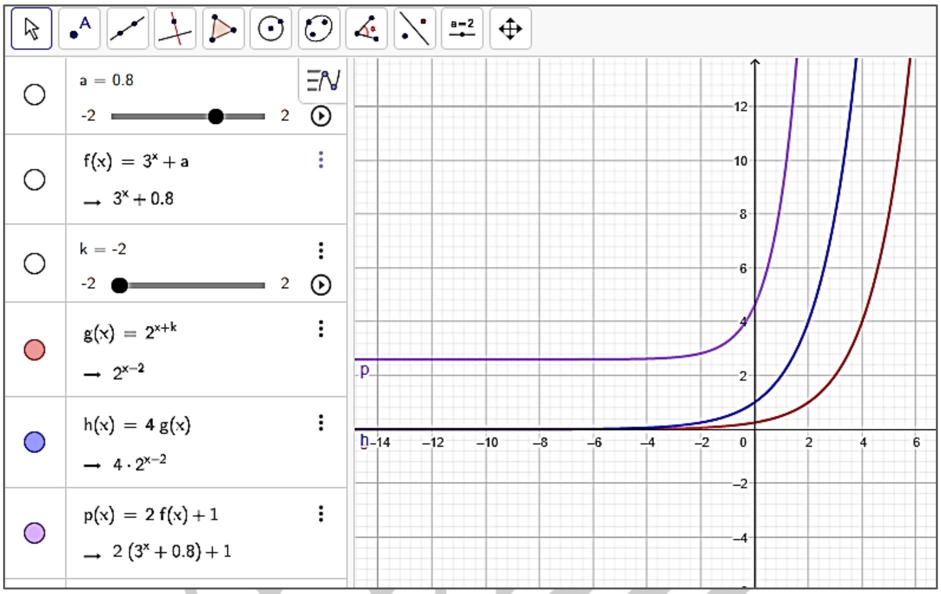
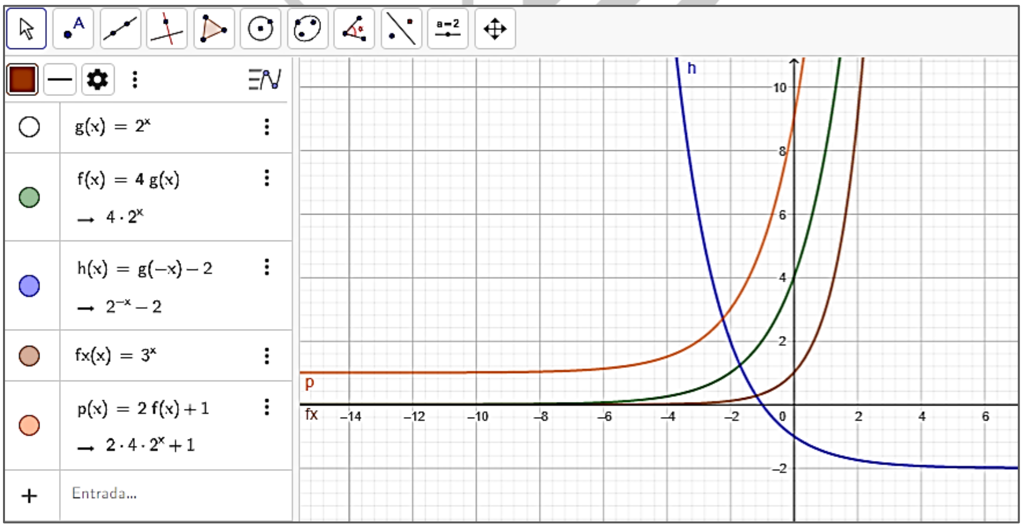


Figura 95. Evidencia del Equipo 2 sobre la actividad 9 (d)



Análisis a posteriori

En las acciones de los estudiantes como sujetos directos del modelo SAI tomamos en cuenta estos elementos que interactúan en el ítem:

Tabla 58. Transformando una función exponencial (Modelo SAI) – Equipo 1 y 2

Equipo	**Modelo SAI: Interpretando la variación del deslizador** k			
	N°	**Instrumento**	**Acción**	**Objeto**
Ambos Equipos	**I**	Gráfica de la función	Realizan desplazamiento	Función exponencial
	II	Deslizador	Realizan trasformaciones	Función exponencial
	III	Vista gráfica	Identifica la asíntota	Función exponencial

Los estudiantes movilizaron esquemas de transformaciones de funciones, resultado de sesiones previas en la enseñanza de la función exponencial. Ambos equipos utilizaron el GeoGebra para aplicar transformaciones en la función exponencial, por lo que la vista gráfica del GeoGebra y la barra de herramienta de encuentra en fase de personalización donde cada sujeto encaja el artefacto de acuerdo a su requerimiento. Asimismo, la vista gráfica se presenta transparente para dicha tarea y no se identificó dentro del GeoGebra restricciones de restructuración de acción puesto que los estudiantes no mostraban dificultades en identificar la transformación de las funciones usando el GeoGebra.

CONCLUSIONES

- Al término del estudio podemos asegurar que hemos respondido a la pregunta de investigación inicial: con respecto a las actividades 1 a 5 si bien los estudiantes presentaron dificultades iniciales al acceso a los comandos ofrecidos por el GeoGebra, poco a poco fueron familiarizándose con dichos comandos por lo que también contribuyó el aprendizaje por descubrimiento y el trabajo colaborativo. En un comienzo, dificultades como identificar claramente puntos en la vista gráfica, zoom, digitalización en la barra de entrada o personalización de los objetos insertados en el programa, fueron superados con la aparición de nuevos esquemas. Asimismo, el interfaz del GeoGebra y la distribución de sus diversas barras de trabajo y vistas si bien tienen un diseño familiar, en algunas ocasiones fueron necesarios repasar la ficha de trabajo inicial sobre la introducción al GeoGebra, con la finalidad de minimizar dificultades en escritura o en clic del mouse
- Las tablas construidas en las secciones de análisis a posteriori, con característica al modelo SAI, nos permitió identificar las dificultades presentadas[26] en los estudiantes, determinando ciertos detalles en el desarrollo de cada ítem y/o acciones en conjunto.
- En esta modalidad de aplicación de instrumentos de manera virtual, fue útil buscar como recurso de apoyo el GeoGebra Classroom puesto que con ello pudimos corroborar información adicional a lo que podían colocar en la presentación de la ficha de trabajo de cada equipo
- Sobre los equipos, hay que mencionar la existencia de estudiantes que movilizaban ya esquemas de uso preexistentes relacionados con relación a los contenidos previos a la función exponencial pero no durante la interacción con el GeoGebra. Podemos concretar que ningún estudiante, previo al desarrollo de las actividades (considerando Actividad 0) había generado algún tipo de interacción con el software, fueron

[26] Dificultades como identificar las diversas partes del GeoGebra, encontrar la calculadora gráfica del GeoGebra, permitir la apertura de las diversas vistas del GeoGebra, etc.

desarrollando nuevos esquemas durante el camino, en el uso constante y variado de los comandos ofrecidos en cada ítem de la actividad. De lo más mínimo que puede ser, arrastre de un punto, zoom de acercamiento o alejamiento o desplazamiento por la barra de herramienta y vista gráfica, todo ello fue desarrollado durante la secuencia de aprendizaje. En el uso de la función exponencial consideramos esquemas preexistentes de los estudiantes relacionados con otros objetos matemáticos como identificación de función, intersección con los ejes, dominio y rango, etc.

- En las actividades del 5 al 9 los estudiantes presentaron dificultad en buscar relaciones de la función exponencial con temas contextualizados como fueron progresiones geométricas e interés compuesto. Ahora bien, argumentando de la función exponencial, observamos que en las últimas actividades de la secuencia de aprendizaje los estudiantes conservaron algunas funciones de las propiedades del GeoGebra y en ellos se puede decir que el proceso de instrumentalización alcanzado fue de manera local, es decir, el primer nivel.
- Con la presente investigación dejamos abierta nuevas posibilidades de futuros trabajos considerando lo siguiente: estudiar el aprendizaje de la función exponencial como la búsqueda del proceso de instrumentación en la génesis instrumental del software GeoGebra, complementado con el GeoGebra Classroom considerando que los aprendizajes de los estudiantes sean duraderos y reales de manera que puedan determinarse esquemas previos y movilizados durante una secuencia de aprendizaje.
- Para futuras investigaciones podrían realizar el estudio de la función exponencial con otros constructos teóricos como el EOS (Enfoque Ontosemiótico) u otro enfoque como la Orquestación Instrumental, para así plasmar una diferencia entre el proceso de la metodología que establece dichas teorías con el Enfoque Instrumental

RECOMENDACIONES

En primer lugar, hay que mencionar que el estudio de las funciones exponenciales en la enseñanza de Educación Básica Regular, o específicamente de las funciones reales de una variable real, hoy en día es muy escaso en investigaciones. Sin embargo, investigar y analizar algunos fenómenos de dichos objetos matemáticos en un entorno dinámico como es el caso del GeoGebra, fueron piezas claves para la motivación de este estudio.

Para la investigación nos pareció de suma importancia relacionar dicho ambiente de aprendizaje con el Enfoque Instrumental de Rabardel, puesto que con este enfoque teórico pudimos observar, identificar y estudiar las acciones de los estudiantes participantes cuando su aprendizaje era mediado por el GeoGebra en diversas actividades en torno a función exponencial. Pues tal dinamismo de aprendizaje, es decir, las interacciones entre GeoGebra-estudiantes y estudiantes-función exponencial, es un proceso en conjunto a lo que Rabardel (2011) denomina como procesos de instrumentalización de la génesis instrumental de un artefacto.

Dicho estudio quiso ser llevado a cabo en esta investigación a partir de una secuencia de aprendizaje diseñada con actividades que involucra el uso intensivo del GeoGebra. Durante el análisis de las actividades se observaron momentos de transformación de esquemas de uso y acomodación/transposición de esquemas nuevos o preexistentes. El modelo de Situaciones de Actividades Instrumentadas propuesto desde la teoría de Rabardel sirvió fundamentalmente para analizar las acciones de los involucrados desde el instrumento que manipulaba, con cierta acción propia del sujeto que demandaba la actividad y el objeto que se estaba estudiando. En resumen, sirvió para identificar las acciones de los estudiantes, el instrumento y el objeto. Junto a ello, en ciertas actividades pudimos relacionar e identificar con los tipos de restricciones, estadio y suficiencia de la transparencia con algunas herramientas del GeoGebra durante el aprendizaje de los estudiantes en la función exponencial. Finalmente, luego del análisis de las actividades realizadas, pudimos establecer que el estadio de instrumentalización alcanzado por los estudiantes fue el de personalización todo ello a causa de la transformación durante la secuencia de aprendizaje diseñada.

Además, cabe recalcar que los aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue se consideró en todo el proceso de análisis de las actividades. A lo largo de dicho análisis se desarrollaron las cuatro fases de su metodología, desde el análisis a priori para conocer las dimensiones a considerar durante el análisis a posteriori, con el fin de considerar acciones esperadas por los estudiantes. Asimismo, pudimos prever o anticipar dificultades en los estudiantes durante el aprendizaje de diversos objetos matemáticos previos al aprendizaje de la función exponencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Advíncula, E. (2010). *Una situación didáctica para la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de las carreras de humanidades*. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]

Alvarez, L. (2017). *Comprensión de las funciones exponenciales y logarítmicas, desde los registros de representación semiótica con la asistencia de entornos virtuales de aprendizaje en estudiantes de primer semestre de la Universidad Tecnológica de Pereira*. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira].

Arredondo, R. (2020). *Espacio de Trabajo Matemático idóneo del profesor universitario al enseñar la función exponencial*. (Tesis para optar el grado académico de Magíster en la Enseñanza de las Matemáticas) Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/17661/ARREDONDO_RIVAS_ROY_ANTHONY.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Artigue, M. (1995). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.

Artigue, M. (1997). Le logiciel «Derive » comme révélateur de phénomènes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 133-169.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (8), pp. 13–33. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6948

Ballestero, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, 4 (3), pp. 125-137. Costa Rica: Universidad Nacional.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2000). Cuadernos de Educación. *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (2da Edición). España, Barcelona.

Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M., Fuentes, M., (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. *Parte*

I. Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5, 13. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=457651376007

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. [Tesis doctoral]. España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cupi, H. (2018). *Comprensión de la noción de función exponencial por medio del tránsito por los distintos registros de representación semiótica en estudiantes de ingeniería* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica]. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/13330

De la Chica, J. (2010). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. En *Las TIC y la educación*.

Drijvers, P. (2003). *Aprendizaje de álgebra en un entorno de álgebra informática. Diseñar la investigación sobre el permanente del concepto de parámetro*. Utrecht: Instituto Freudenthal.

Drijvers, P. (2013). Un episodio, dos lentes. Un análisis reflexivo del aprendizaje de los estudiantes con álgebra informática desde perspectivas instrumentales y ontosemióticas. Utrecht: Instituto Freudenthal.

Escobar, N. (2012). *Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica* [Trabajo de Investigación, Universidad del Valle]. Recuperado de: https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/4709/CB-0461215.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Galvis, Y. (2019). *Euclidea propone y tú argumentas. Esquema de argumentación y génesis instrumental* [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Recuperado de: http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/11527/TO-23762.pdf?sequence=1&isAllowed=y

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis Instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de: https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/2266

García, W. (2012). *Modelación matemática en funciones exponencial y logarítmica: una propuesta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas básicas.* [Trabajo de investigación, Universidad Nacional de Colombia]. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/11057535.pdf

Gascón, J. (1998). Evolución didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (52), 7-33.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). El complejo proceso de convertir herramientas en instrumentos matemáticos: El caso de calculadoras. *Revista Internacional de Computadoras para el Aprendizaje Matemático*, 3(1), 195 - 227.

Grueso, R. (2019). El concepto de función como covariación en la escuela Secundaria. En *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/996/517.

Guitar, M. (2011). Aplicaciones contemporáneas de la teoría Vygotskyana en Educación. *Educación y Desarrollo Social*, 5 (1), pp. 113-114.

Kozulin, A. (2000). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: PAIDÖS.

Lagrange, J. (2002). Les outils informatiques entre "sciences mathématiques" et enseignement. Une difficile transposition? En D. Guin y L. Trouche (ed.), *Calculatrices Symboliques. Transformer du travail informatique: un problème didactique* (pp.89-116).

Ledesma, M. (2014). Análisis de la teoría de Vygotski para la reconstrucción de la inteligencia social. Quito: Jurídica del Ecuador.

Manrique, A. (2020). *Una orquestación instrumental con la mediación de la calculadora gráfica para movilizar la noción de la función cuadrática en estudiantes de nivel secundario.* Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Martínez, G. (2003). *Los Procesos de Convención Matemática como Constituyentes en la Construcción Social de la Matemática de la Variación y el Cambio*. [Tesis de Maestría, Universidad de los Andes] Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/6142/1/MartinezLosprocesosAlme2005.pdf

Martínez-Miraval, M., & García-Cuéllar, D. (2020). Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida. *Formación universitaria*, 13(5), 177-190. Recuperado de: https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Mejía, M. (2011). *La factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de Lápiz/Papel (L/P) y Álgebra Computacional (CAS).* [Trabajo de investigación para optar el título de Magister en Educación, Universidad del Valle] Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11563/2/Mejia2011La.pdf

MINEDU (2020). *Matemática 5*. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/1ARNzhHakv4tNginCRdQmMJOy9dH_TTO/view

Morales, A. (2011). Un breve estudio historico y epistemologico de la funcion exponencial y analisis de algunos libros de texto. *Memorias encuentro nacional de Educación Matemática y Estadística*, 123–129. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/154338987.pdf

Patiño, J. (2021) *Estrategia pedagógica mediad por GeoGebra para el aprendizaje del pensamiento geométrico*. Tesis para optar Maestría en Educación. Colombia: Universidad de la Costa CUC.

Pozo, J. (1992). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal*. Madrid: Visor

Rabardel, P. (1999*). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques*. Caen : IUFM de Caen

Rabardel, P. (2011). *Los Hombres y las Tecnologías: visión cognitiva de los instrumentos cognitivos*. Santander: Universidad Industrial de Santander.

Rabardel, P. & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers* 15(5), 665-691

Rabardel, P. y Verilon, P. (1995). Cognición y artefactos: una contribución al estudio del pensamiento en relación para instrumentar la actividad. *Revista Europea de Psicología de la Educación*, 9 (3), 77 - 101.

Ramirez, C. (2019) *Construcción de la función exponencial con estudiantes de quinto de secundaria por medio de situaciones didácticas en la I.E Fray Martin C.P Menor Santa Cruz de la Succha Cutervo* [Tesis para optar el grado académico de Magister en la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo] Recuperado de: http://repositorio.unprg.edu.pe/bitstream/handle/UNPRG/5395/BC-%203996%20%20RAMIREZ%20CIEZA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ritella, G. y Hakkarainen, K. (2016). Instrumental genesis in technology-mediated learning: From double stimulation to expansive knowledge practices. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 7(2), 239-258.

Rojas, M., & Quituizaca, E. (2015). *Guía didáctica de funciones exponenciales y logarítmicas aplicando el aprendizaje basado en problemas para terceros del bachillerato general unificado*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Cuenca]. Recuperado de: https://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/23159/1/Tesis.pdf

Romero, L. y Granados, L. (1983). *Análisis Matemático*.

Santacruz, M. (2009). *Orquestación Instrumental: Un estudio de caso en Educación Primaria a propósito de la Noción de transformación de Rotació*n (Tesis de Maestría). Cali: Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Santillana (2020). *Matemática 5. Texto Escolar 5 Secundaria*.

Sureda, D. (2012) *Enseñanza de las funciones exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos*. Tesis para optar el grado de Docta en Enseñanza de las Ciencas con mención en Matemática. Buenos Aires: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Trouche, L. (2004). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (eds.), *The didactical Challenge of symbolic Calculator* (pp. 137- 162). New York, E.U.A: Springer.

Trouche, L. (2003). Gestión de la complejidad de la interacción humano / máquina en un ambiente CAS. En *Guiar el proceso de comando del estudiante a través de orquestaciones instrumentales* (Tercer Simposio de Educación Matemática de Álgebra Informática). Reims: Francia

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. En J. Brun (Ed.), *Didáctica das matemáticas* (pp. 155-189). Horizontes pedagógicos.

Vigotsky, L. (1990). *El desarrollo de las funciones psicológicas superiores*. Barcelona: Crítica

Vygotsky, L (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Xavier, A. (2015). *Um estudo da genêsis instrumental para função de uma variável real com várias sentenças* [Tesis de Mastría, Pontifícia Universidade Católica]. Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/18765/2/Armenio%20Lannes%20Xavier%20Neto.pdf

ANEXOS

ANEXO N° 1: CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPAR EN EL ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN

Este documento tiene como propósito brindar una explicación clara y comprensible del objeto que tiene laparticipación de informantes en el proceso de recogida de información con fines científicos. El nivel de alcance que puede presentar el consentimiento informado puede ser personal y/o institucional.La participación es estrictamente voluntaria.

La información que se recoja será confidencial y no se utilizará para propósitos distintos a los de estainvestigación.

Datos del Bachiller **:** Alvaro Victor Reducindo Alvarez
Código Universitario **: 0072614371**

Carrera y Especialidad : Educación – Educación Secundaria con Especialidad en Matemática

Breve explicación del propósito que tiene el estudio llevado a cabo y la necesidad de recoger información:

El propósito del estudio es analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el estudio de la función exponencial (tema de Algebra) a partir de diversas secuencias de aprendizaje donde usaran un software matemático llamado GeoGebra. La enseñanza se llevará a cabo a manera de talleres y se pretende analizar si con ayuda del software se garantiza un mejor aprendizaje en el estudio mencionado anteriormente. La necesidad de recoger información es esencial para dar resultados a la investigación y las hipótesis planteadas en el estudio.

Instrumentos que serán aplicados:

- Primer encuentro: Prueba diagnóstico de temas de Algebra y Aritmética
- Segundo encuentro: Introducción al software GeoGebra
- Tercer encuentro: Taller de actividades asociados al GeoGebra (Act. 1 – 5)
- Cuarto encuentro: Taller de actividades asociados al GeoGebra (Act. 6 – 10)
- Ficha de observación en todos los encuentros (no desarrollan los estudiantes)

Descripción del procedimiento que se llevará a cabo para la administración y/o aplicación de estos instrumentos: *(Especificaciones sobre las condiciones de espacio, tiempo, modalidad referida a la formade administración escrita o verbal, grabaciones, etc).*

Condiciones del espacio:

- Los estudiantes se conectarán vía Zoom o Google Meet a los encuentros y se requiere el uso indispensable de una computadora o laptop.
- Todas las sesiones serán grabadas así cómo lo que realiza cada estudiante en su ordenador
- Los estudiantes se crearán una cuenta de estudiante en GeoGebra el cual será nuestra

Tiempo:

- Se tiene considerado que cada taller dure entre 1h 20min a 1h 40min

Modalidad referida a la forma de administración escrita o verbal,

- La comunicación con los estudiantes será a través un grupo de WhatsApp

Yo (nosotros) ____, mayor(es) de edad, madre [ ] padre [ ] acudiente o [ ] representante legal del estudiante ____, he(mos) sido informado(s) acerca de la propuesta pedagógica que tiene como fin fortalecer el aprendizaje del área de matemática en el tema de función exponencial en los estudiantes de cuarto grado de secundaria mediante el uso de un software matemático GeoGebra, lo cual presenta el Bachiller Alvaro Victor Reducindo Alvarez para optar el titulo de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemática en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya.

Luego de haber sido informado(s) sobre las condiciones de la participación de mi hijo(a) en el desarrollo de la propuesta, resuelto todas las inquietudes y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo (entendemos) también que:

- La participación de mi (nuestro) hijo(a) no tendrá repercusiones o consecuencias en sus actividades escolares, evaluaciones o calificaciones en el curso de Matemática
- La participación de mi (nuestro) hijo(a) no generará ningún gasto, ni recibiremos remuneración alguna por su participación
- No habrá ninguna sanción para mi (nuestro) hijo(a) en caso de que no autoricemos su participación
- La identidad de mi (nuestro) hijo(a) no será publicada, las encuestas, prueba diagnóstica, test, evaluaciones, imágenes, videos o sonidos y demás a que haya lugar y que sean registrados durante todo el proceso de investigación se utilizaran únicamente para los propósitos de la investigación
- El investigador garantizará la protección de las imágenes de mi (nuestro) hijo(a)y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente, durante y posteriormente al proceso de investigación
- La asistencia de mi (nuestro) hijo(a) a las clases solamente serán en los horarios establecidos.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados, y de forma consciente y voluntaria [ ] DOY (DAMOS) EL CONSENTIMIENTO [ ] NO DOY (DAMOS) EL CONSENTIMIENTO para la participación de mi (nuestro) hijo(a) en el desarrollo de la investigación del Bachiller.

IMPORTANTE:

Las evidencias impresas, de video o de audio tendrán una vigencia correspondiente con la presentación delinforme final. Esto implica su eliminación una vez concluida el proceso que corresponde a estos fines.

Se atenderán las dudas o inquietudes del participante, otorgando el derecho a retirarse o a continuar con elproceso llevado a cabo.

REGISTRO DE LA PARTICIPACIÓN VOLUNTARIA

Acepto voluntariamente participar en este estudio, he comprendido perfectamente la información que se me ha brindado sobre las cosas que van a suceder si participo en el proyecto, también entiendo que puedo decidir no participar y que puedo retirarme del estudio en cualquier momento.

Firma del Participante Fecha

Nombre:

DNI:

Firma del Investigador Huella Digital Fecha

Nombre:

DNI:

Julio, 2021

ANEXO N° 2: INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

UNIVERSIDAD ANTONIO RUIZ DE MONTOYA

INSTRUMENTO - PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

NOCIONES PREVIAS A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Encargado: Br. Alvaro Victor Reducindo Alvarez

<table>
<tr><td rowspan="3">Nombres y apellidos:

Carrera:</td><td>Duración: 1h 20min</td></tr>
<tr><td>Fecha: / /</td></tr>
<tr><td>Plataforma ZOOM</td></tr>
</table>

Introducción

El presente instrumento está orientado a observar y determinar los esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada de los participantes involucrados en las nociones previas a la introducción de la función exponencial. Además, reconocer, en un primer momento, qué sistema de representación hacen un mejor uso para dar respuesta a cada problema y comprender como construye dichos conceptos previos.

Los datos recopilados mediante la aplicación de la prueba diagnóstico serán usados exclusivamente con fines académicos.

Instrucciones:

- En esta prueba encontrarás 10 problemas que serán distribuidas en tres partes. Lee con calma y atención cada situación presentada y cada pregunta establecida
- Las preguntas serán desarrolladas individualmente. No se permite el uso de calculadoras ni material de consulta.
- Los estudiantes activarán sus cámaras y la reunión será grabada durante toda la prueba de diagnóstico
- En caso tenga alguna demora en dar solución a un problema, pasa al siguiente, cuando termines, podrás regresar a los problemas que no has respondido.
- Las consultas serán solamente atendidas cuando se trate de algún error en redacción en el requerimiento o situación planteada del problema

PARTE I

Ley de exponentes

1. Resuelve las siguientes operaciones
   a) $7.5\ x\ 10^{-2} - 4.5\ x\ 10^{-3} + 5.4\ x\ 10^{-1}$
   b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^{-2}$
   c) $\left(\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2} x\ 3^{-\frac{4}{3}}}{3^{-1}}\right)\left(\frac{9\ x\ 3^{-2}}{27}\right)$

Progresiones aritméticas y geométricas

2. Establece si la secuencia es aritmética, geométrica o ninguna. Justifica tu respuesta

Secuencia	**Progresiones**			**Justifica tu respuesta**
	Aritmética	**Geométrica**	**Ninguna**	
3, -15, 75, - 375, …				
64, 48, 36, 27, …				
2, 22, 222, 2222, …				
$60, 10, \frac{5}{3}, \frac{5}{18}, \ldots$				
-3.6, -5.4, -8,1, -12.15, …				
5, 8, 12, 17, …				

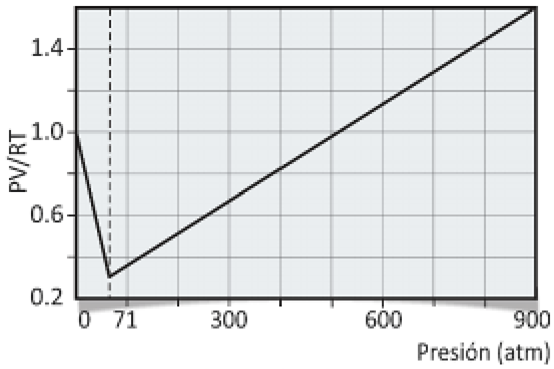
3. Determina si la siguiente relación descrita es aritmética (lineal) o geométrica (exponencial)

Situación	**Relación**
• Por cada ocho horas que pasan, el área infectada por una bacteria se duplica	
• Un serenazgo de una residencial realiza su servicio de 6 horas cada día	
• Para lograr la demanda de trabajo en la construcción de un supermercado, los ingenieros empezaron a quedarse 20% más de tiempo cada día	
• Por lo general, cada año un perro cumple 5 veces la edad de un humano	

• El distrito de Lima aumenta poblacionalmente un 5% cada año	

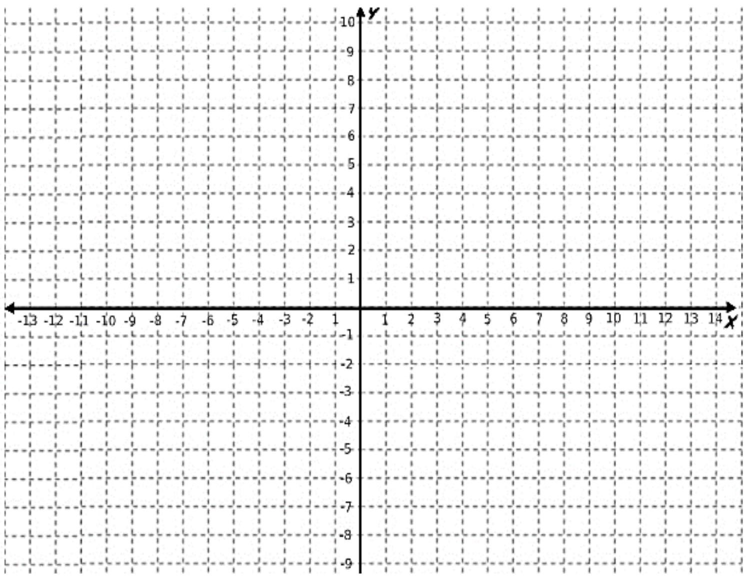
PARTE II

4. Identifique el dominio y rango de dicha función que se presenta en el siguiente gráfico



Datos tomados de Theodore L. Brown, 1998

5. Esboce una tabla y gráfica correspondiente de $f(x) = \frac{x-2}{2}$, donde el dominio es el número atómico comprendido entre 4 y 8 protones y el rango es la electronegatividad.

Tabla	Gráfica
	

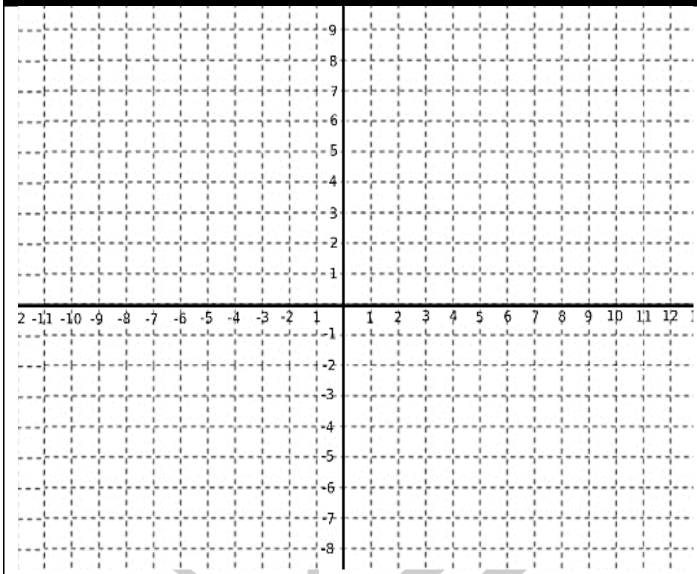
6. Calcule las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de la función de f con los ejes de coordenadas cuando

$$f(X) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Escriba aquí su procedimiento y respuesta	
Intersección con el eje X	**Intersección con el eje Y**

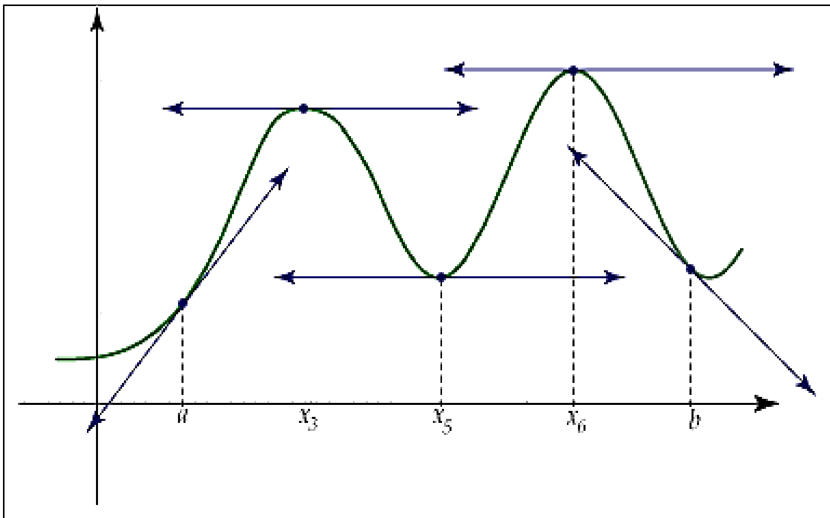
7. Con la información mostrada, determina si los datos de la tabla pueden se representados por una función lineal. De no poder, grafique e indique que tipo de función puede ser representada

x	y
-4	10
-3	7
-2	4
-1	1
0	-2
1	-5

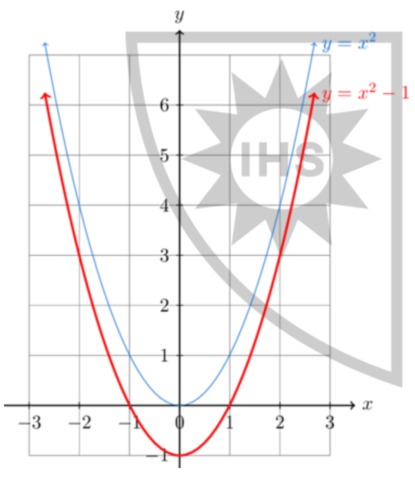
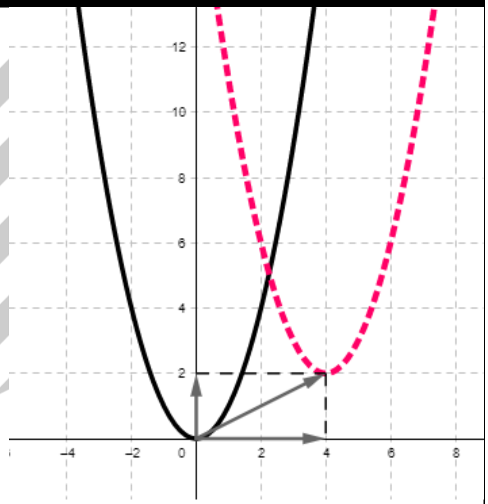
Gráfica adecuada	Es una función ...
	

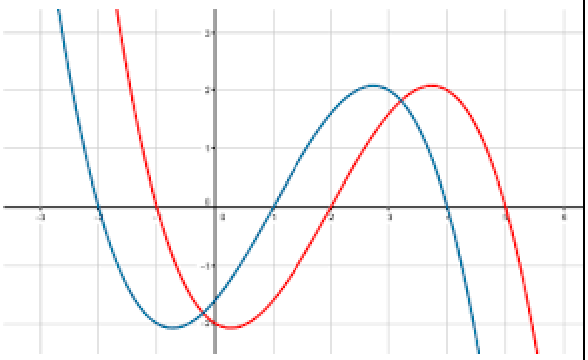
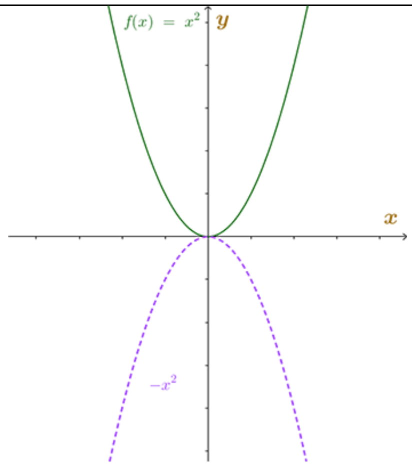
8. A su criterio nombre valores a los valores que se presenta en el eje X $(a, x_3, \ldots)$ y determina los intervalos que representa una función decreciente y creciente

Gráfica	Decreciente o Creciente

9. Observe la familia de funciones y determine si corresponde a un proceso de dilatación, traslación o reflexión

Familia de funciones	Dilatación/Traslación/Reflexión
	

PARTES	Aspectos	Conocimientos Previos	PARTE I	PARTE II	PARTE III
PARTE I	**Sobre objetos matemáticos previos**	• Ley de exponentes • Progresión aritmética y geométrica • Interés simple y compuesto	**Preguntas del N° 1 al N°3**		
PARTE II	**Sobre el concepto de función**	• Dominio, rango e intersecciones • Representación gráfica de una función • Función creciente y decreciente		**Preguntas del N° 4 al N°8**	

<u>INSTRUMENTO N° 0:</u> INTRODUCCIÓN AL GEOGEBRA

Encargado: Br. Alvaro Victor Reducindo Alvarez

Integrantes del Equipo	**Duración:** 80 - 90min
•	**Fecha:** / /
•	**Plataforma ZOOM**
•	
Nombre del Equipo:	

Introducción

El presente instrumento está orientado a observar y determinar los esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada de los participantes involucrados en el uso del software GeoGebra. Además, reconocer, en un primer momento, el nivel en relación al proceso de instrumentalización que se encuentran los estudiantes.

Los datos recopilados mediante la aplicación de la prueba diagnóstico serán usados exclusivamente con fines académicos.

Instrucciones:

• En esta prueba encontrarás 10 actividades que serán distribuidas en tres partes. Lee con calma y atención cada situación presentada. • En el espacio virtual del aula se muestra la carpeta Actividades _Función Exponencial. Ubique en esta carpeta el archivo Encuentro1_ggb, el cual contiene las actividades propuestas en la plataforma GeoGebra • Las preguntas serán desarrolladas de manera grupal. No se permite el uso de calculadoras ni material de consulta.

PARTE I: *Reconociendo el interfaz del GeoGebra (versión Web) en sus vistas algebraicas y gráficas*

• **Diferenciando las partes del interfaz en la pantalla inicial de GeoGebra (Menú, barras de herramientas, pista de herramienta seleccionada ventanas algebraicas y gráficas, zonas de trabajo, línea de comandos/entrada)**
• **Reconociendo las diversas barras de herramientas: gráfica, 3D, CAS y Hojas de cálculo**
Diferenciando cada uno de los comandos de *la barra de herramientas gráficas*
• Con la herramienta  o  desplaza la vista gráfica

• En la vista gráfica expones u ocultas los ejes o la cuadrícula
Introduciendo primeros objetos algebraicos en GeoGebra
• En la barra de entrada + Entrada... ingresar la ecuación $y = x - 2$ usando el teclado virtual del GeoGebra
• En la vista gráfica configura las escalas de los EjeX : EjeY de **1: 1 y 1: 10**. Luego practica con tus grupos otras posibles escalas y vuelve a **vista estándar**
• Haz visible los ejes x *e* y con (la herramienta desplazar) y con la herramienta mover mueve la gráfica a un lugar aleatorio. Puedes hace uso del zoom y fíjate que no se encuentre como objeto fijo
• Agrega **puntos especiales** a la ecuación $y = x - 2$ en la barra de entrada.
• Selecciona y elimina la gráfica con
• Activa la opción de vista **hoja de cálculo** en la barra de menú. *Puedes ingresar números para realizar cualquier operación o puntos con coordenadas, funciones para insertarlos en la vista gráfica*. Por ejemplo, ingresa $y = x^2 + 1$ con el teclado virtual y los puntos (3, 10) y (-3, 10) en la hoja de cálculo
• Expone y oculta objetos con el comando que se visualiza en el lado izquierdo del objeto insertado. También realízalo con el comando y observa la diferencia.
• Crea un nuevo archivo en blanco de GeoGebra

PARTE II: *Trazando puntos, segmentos y rectas paralelas y perpendiculares*

Trazando puntos y segmentos
• Usando el comando *Punto* señala 3 puntos correspondientes a la ecuación $y = 3x + 5$. Realiza lo mismo usando la barra de entrada + Entrada...
• Ubica los puntos $A(-3,5)$ y $B(2,-4)$ ya sea utilizando el comando Punto o la barra de entrada. Luego crea un segmento con dichos puntos con el comando y mencione la distancia entre los puntos
• Con la herramienta mover renombra los puntos: el punto A por la letra M y el punto B por la letra N.
• Con la misma herramienta cambia las propiedades del nuevo segmento MN. Cambia de color y estilo del segmento
Trazando rectas y puntos

• Marca 2 puntos cualquiera en el plano. Traza una línea recta L y menciona la ecuación de la recta hallada.
• Encuentra la recta de los puntos creados a partir del comando Entrada: Recta(A, B)
• Encuentra la pendiente de la recta usando Pendiente(<Recta, semirrecta o segmento>)
Trazando rectas paralelas y perpendiculares y puntos de intersección entre ellos
• Por uno de tus puntos creados, traza una recta paralela a la recta L con el comando recta paralela Mencione la ecuación de la recta paralela creada
• De igual forma, por uno de tus puntos creados, traza una recta paralela a la recta L con el comando recta perpendicular Mencione la ecuación de la recta perpendicular creada
• Luego borre todos los elementos de la vista gráfica
• Traza la recta $5x - 2y + 1 = 0$ y una recta perpendicular a ella. Luego usa el comando (intersección)

PARTE III: *Explorando la herramienta deslizador y la entrada función hallando puntos de intersección con el eje y simetría axial*

Conociendo las partes de la herramienta deslizador
• Selecciona la herramienta deslizador a=2 y haz clic sobre la vista gráfica. En la casilla *nombre* etiqueta la letra $a = m$. Los demás intervalos permanece iguales
• En la barra de entrada ingresa la recta $L: y = mx - 3$. Luego desplaza el deslizador y comenta lo sucedido. Se estudia el significado de la pendiente
• Nuevamente selecciona a=2 con la etiqueta $a = n$. Luego, grafica la recta $L: y = 2x - n$ y comenta lo sucedido. Se estudia el significado de la ordenada en el origen
• Luego borre todos los elementos de la vista gráfica
Puntos de intersección con los ejes (interceptos con los ejes)
• Grafique una recta L que intercepten los ejes X e Y usando la barra de entrada o la herramienta recta con dos puntos
• Con la herramienta intersección entre dos objetos seleccione dos objetos y halle los puntos donde la recta L interseca al eje de abscisa y ordenadas.
Confección de barra personal de herramientas

INSTRUMENTOS N° 1 AL 9ª:

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL A TRAVÉS DEL GEOGEBRA

Encargado: Br. Alvaro Victor Reducindo Alvarez

Integrantes del Equipo	**Duración:** 80 - 90min
•	**Fecha:** / /
•	**Plataforma ZOOM**
•	
Nombre del Equipo:	

Introducción

El presente instrumento está orientado al aprendizaje de la función exponencial mediante una secuencia de aprendizaje con el uso del GeoGebra. En este segundo encuentro se realizará las actividades 1,2,3,4 y 5 de un total de 10. El objetivo es de identificar los procesos de instrumentalización de los estudiantes en las distintas actividades. Finalmente, los datos recopilados mediante la aplicación de la prueba diagnóstico serán usados exclusivamente con fines académicos.

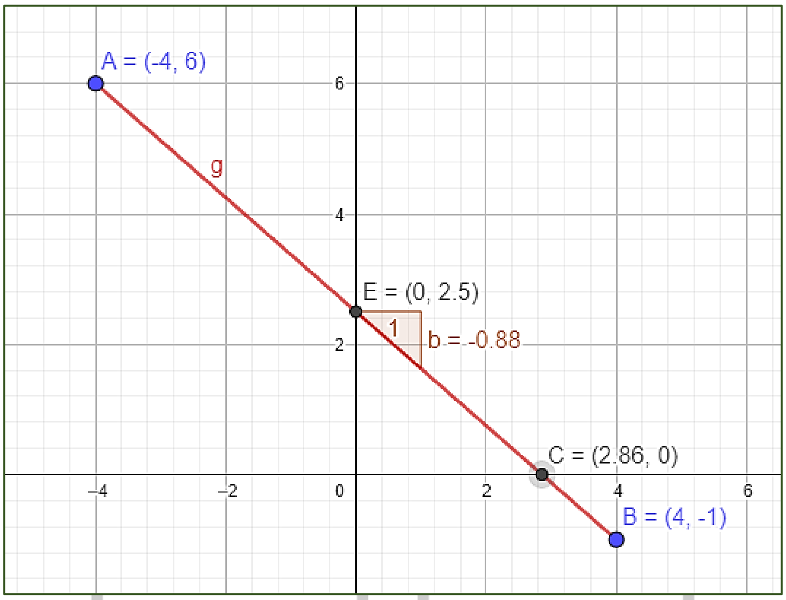
Instrucciones:

- En esta prueba encontrarás 5 actividades por lo cual deberán solamente tener abierto las siguientes paginas en su navegador web.
    - GeoGebra Classic 5.0 https://www.geogebra.org/classic
    - Moodle del aula en la carpeta Actividades_Función Exponencial.
- En el espacio virtual del aula se muestra la carpeta Actividades _Función Exponencial. Ubique en esta carpeta el archivo Encuentro2_ggb, el cual contiene las actividades propuestas del día
- Las preguntas serán desarrolladas grupalmente. No se permite el uso de calculadoras ni material de consulta.
- Trabaje de manera simultánea con el archivo y con esta ficha de actividades.

ACTIVIDAD 1

Temática: Analizar la gráfica de una función lineal en la vista gráfica del GeoGebra (regla de correspondencia, pendiente, pares ordenados) indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

En el archivo **Actividad_1.ggb** se muestra la representación gráfica de dos puntos. A través de los comandos de edición en la “Barra de Entrada” o del uso de las opciones de la “Barra de Herramientas” del GeoGebra, efectúen lo siguiente para determinar la función g definido en un intervalo especifico tal como se muestra



a) Abre el archivo Actividad_1.ggb del GeoGebra y grafiquen los puntos A (-4, 6) y B (4, -1)

b) Luego, grafiquen una recta que pasen por los puntos anteriores

   a. *Primer momento de redacción:* redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron

c) A continuación, delimiten la función de la recta en un intervalo marcado por los puntos A y B con el comando de la barra de entrada **Función**(<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>)

d) Por último, señalen los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados y determinen el valor de la pendiente de la recta.

a. *Segundo momento de redacción*: redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron y comparta el gráfico obtenido y su regla de correspondencia de la forma $f(x) = ax + b,\ x \epsilon\ [\ m\ ; m\ ]$

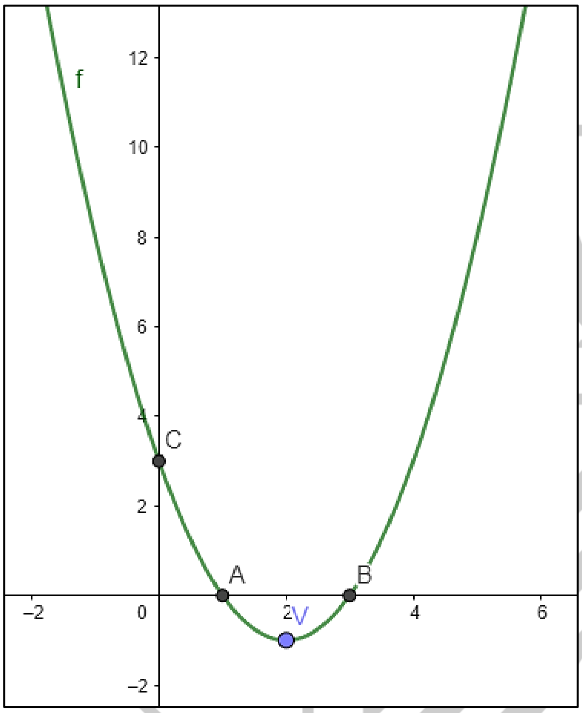
Gráfico	**Pasos que siguieron**
Regla de correspondencia de la función lineal *g*	

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "*Archivo* → *Guardar*" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 2

Temática: Analizar la gráfica de una función cuadrática en la *vista gráfica* del GeoGebra indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados, regla de correspondencia, vértice, dominio y rango, etc.)

En el archivo *Actividad_2.ggb* se muestra la representación gráfica de una función cuadrática f, con vértice V y con cortes en los ejes X e Y en los puntos A, B y C respectivamente.



a) En el recuadro escriban las coordenadas del vértice y respondan que herramienta o método dentro del software GeoGebra utilizarían para determinar el vértice:

Coordenada del vértice	**Herramienta o método que utilizarían**

A continuación, respondan: ¿Si no existiese la barra de entrada de funciones, con que herramienta podrían graficar una parábola?

b) En el recuadro escriban la regla de correspondencia y respondan: ¿dónde cae los puntos de intersección y con qué valores? ¿con que herramienta o método lo determinaría? Expliquen sus razones

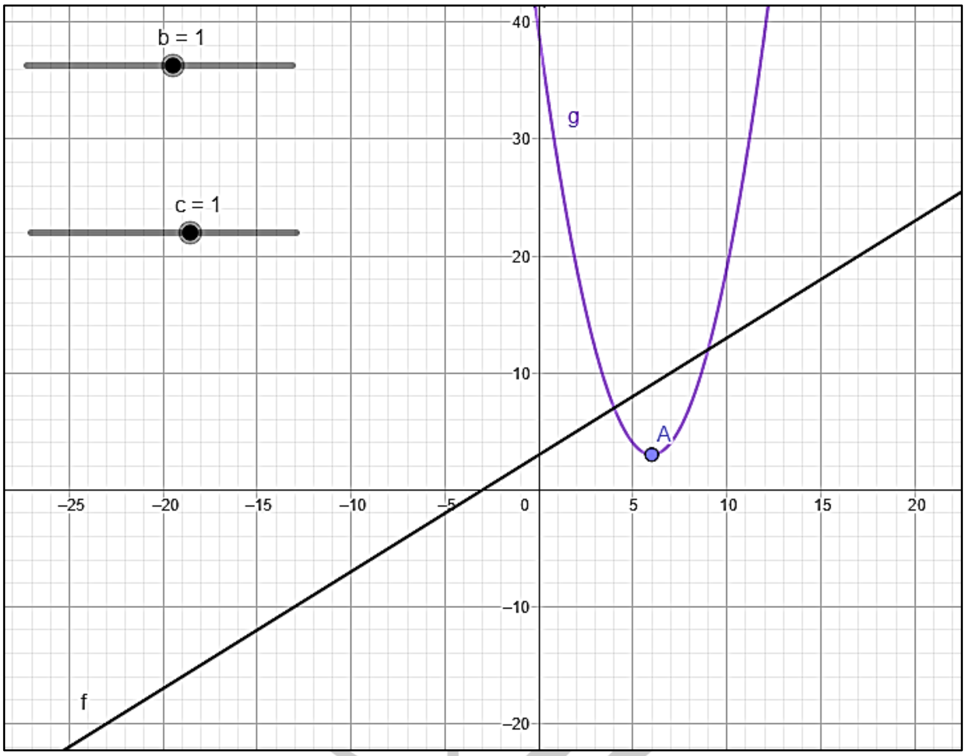
Regla de correspondencia	**¿Dónde cae los puntos de intersección y con qué valores?**	**¿Con cuál herramienta o método lo determinarían?**

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en "*Archivo* → *Guardar*" de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente actividad

ACTIVIDAD 3

Temática: Escribir funciones lineales y cuadráticas con ciertas características y formar nuevas reglas de correspondencia de las nuevas funciones, moviendo un punto (par ordenado) en particular.

En el archivo Actividad_3.ggb de GeoGebra que abrirán a continuación, observarán dos gráficas de funciones f y g, función lineal y función cuadrática, respectivamente. Y dos deslizadores que se arrastran con el cursor del mouse, tal como se muestra en la figura



Respondan lo siguiente:

Sobre los deslizadores

a) ¿Qué determina los deslizadores b y c cuando varía su valor?

Sobre las funciones

b) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones se intercepten en dos puntos

Valores de b	**Valores de c**
b = ________ b = ________ b = ________ b = ________	c = ________ c = ________ c = ________ c = ________

c) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones se intercepten en un solo punto

Valores de b	**Valores de c**
b = ________ b = ________ b = ________ b = ________	c = ________ c = ________ c = ________ c = ________

d) Escriba los posibles valores de *b y c* de los deslizadores que hacen que las funciones no se intercepten en ningún punto

Valores de b	**Valores de c**
b = ________ b = ________ b = ________ b = ________	c = ________ c = ________ c = ________ c = ________

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 4

Temática: Analizar la construcción de las gráficas de funciones creadas por una lista de puntos

En el archivo Actividad_4.ggb representará una de las funciones con los datos de su tabla usando las herramientas disponibles en GeoGebra

Función f	**Función g**	**Función h**

X	Y
0	-2
1	1
2	4
3	7
4	10

X	Y
-1	1/8
0	¼
1	½
2	1
3	2

X	Y
1	1
2	4
3	9
4	25
5	36

a) Grafique la función con los puntos representados en la tabla
b) A continuación, redacten en el recuadro la secuencia de pasos que utilizaron en la parte a).

Proceso gráfico de la función creada
A su consideración ¿Qué tipo de función es?

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 5

Temática: Determinar el dominio y rango de dos funciones comprendidas en un intervalo

Considerando las siguientes funciones cuyas reglas de correspondencia y dominios son las siguientes:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^2 - 3x, x \in [-3; 2] \ \ y \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 2x - 3, x \ \in [-4; 3]$$

A través del ingreso de comandos en la “Barra de Entrada” y del uso del archivo “Ayuda del GeoGebra” ubicado en la ruta: en la carpeta “Actividades_Función Exponencial” de su aula virtual, efectúen lo siguiente:

a) Mediante el uso de un comando apropiado grafiquen la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ en el archivo Actividad_5a.ggb de GeoGebra.

b) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte a).

Proceso gráfico de la función creada	
Mencione el rango de la función	

c) Escribiendo un comando diferente al usado en a), grafiquen la función $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ en el mismo archivo Actividad_5a.ggb de GeoGebra.

d) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte c).

Proceso gráfico de la función creada	
Mencione el rango de la función	

De igual forma, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 6

Temática: Introducir el contenido de función exponencial a partir del estudio de las progresiones geométricas y la fórmula de capital con interés compuesto

En el archivo Actividad_6a.ggb encontrarán una situación problemática referido al tema de progresiones geométricas:

> Para el concurso de murales decorativos con respecto al Bicentenario del Perú se inscribieron 256 estudiantes. Lo singular del concurso es que pintarán todas las paredes externas de un cerco perimétrico, lo cual servirá para confraternizar y celebrar dicho evento.
>
> La modalidad de eliminatorias es que cada dos murales compiten entre sí y después de ser evaluados por el jurado en una primera ronda, sólo los ganadores pasaran a la segunda ronda. Posteriormente, los ganadores de esta ronda pasarán a la tercera, cuarta, quinta, etc., sucesivamente hasta llegar a la final. Entonces ¿cuántas rondas se realizarán antes de llegar a la final?

a) Desarrollen el ejercicio según sus conocimientos previos y luego inserte su desarrollo en dicho espacio:

Proceso de resolución

b) Mediante el uso de Hoja de cálculo en el GeoGebra se procede a desarrollar la situación problemática. Luego responda:

   I. Si relacionamos los valores de los pares ordenados formando una gráfica ¿Representaría a una función? ¿Qué tipo de función?

   II. ¿Pueden encontrar alguna similitud entre progresiones geométricas y función algebraica? Explique

III. En otro contexto, ¿Qué preferirían, que le den un millón de dólares o un dólar el primer día, el doble de dólar el siguiente día y el doble de dólar del día anterior y así de esta manera por un mes? Justifique

En el archivo Actividad_6b.ggb encontrarán otra situación problemática referido al tema de interés compuesto:

Un capital de s/. 10.000 se coloca al 5,5% anual durante tres años. ¿Cuál es el capital producido mediante interés simple? ¿Y mediante interés compuesto?

c) Desarrollen el ejercicio según sus conocimientos previos y luego inserte su desarrollo en dicho espacio:

Proceso de resolución

d) Mediante el uso de deslizadores en el GeoGebra se procede a desarrollar la situación problemática. Luego responda

I. ¿Se forma alguna gráfica de función? ¿Y cuál es la función que interpreta mejor el problema?

II. ¿Qué semejanzas puedes establecer entre un interés compuesto e interés simple con las gráficas de función?

III. ¿Cómo la función exponencial es interpretada aplicando el interés compuesto?

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 7

Temática: Interpretar la expresión de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ cuando $b > 1$ y $0 < b < 1$

En el archivo Actividad_7.ggb se presenta dos funciones exponenciales cuyas reglas de correspondencia son las siguientes:

$$f(x) = a^x, si - 5 < a < 5$$

$$h(x) = b^x, si\ 0 < b < 1$$

Luego de interpretar la gráfica con ayuda de los deslizadores, mencionen lo siguiente

a) Con respecto a la gráfica $f(x)$, ¿qué sucede con la gráfica si a toma valores negativos?

Explique:	**Gráfica:**

b) Con respecto a la gráfica $f(x)$, ¿Qué sucede si el valor de a es igual a 1 y -1?

Explique:	**Gráfica:**

c) Con respecto a la gráfica $h(x)$, ¿qué sucede con la gráfica si a toma valores entre 0 y 1?

d) ¿A qué será similar la gráfica de $y = 2^{-x}$? (Grafique e interprete de otra forma y explique cómo consiguieron la respuesta)

e) Observando las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿puede determinar donde se da la intersección con el eje x y el eje y?

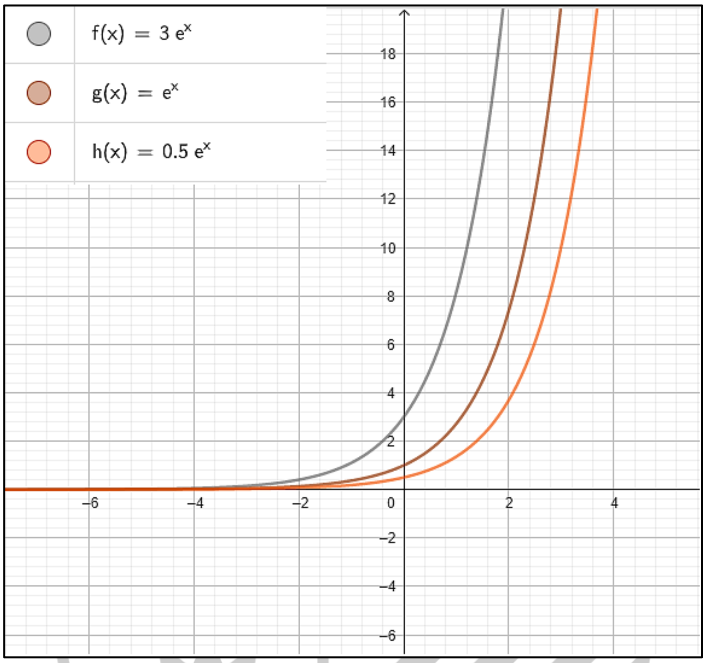
f) Luego de observar las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$ ¿las funciones pueden valer 0?

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta

ACTIVIDAD 8

Temática: Determinar la función de la asíntota horizontal en las funciones exponenciales

En el archivo Actividad_8.ggb se presenta la siguiente gráfica con las siguientes funciones:



Luego de analizar las gráficas en equipo determinen lo siguiente:

a) Indiquen las diferencias y similitudes que pueden encontrar en las gráficas

Diferencias	***Similitudes***
•	•

b) Responda: ¿en algún momento las gráficas intersecan con el eje x? ¿cuál sería la razón? ¿existe alguna recta imaginaria que impida ello? Fundamenten.

c) En el mismo archivo grafiquen la recta $y = 0$ (personalice con otro color al predeterminado por el GeoGebra) y analicen nuevamente que suceden en relación con las gráficas:

d) Indiquen la función de la asíntota en las gráficas de funciones

e) En el mismo archivo grafiquen una función $q(x) = e^x + k$, donde k puede ser positivo o negativo

f) A continuación, redacten la secuencia de pasos que utilizaron en la parte e) y determinen la asíntota de la función

Proceso de construcción de la gráfica de $q(x)$ usando comandos del GeoGebra

Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta.

ACTIVIDAD 9

Temática: Interpretar el desplazamiento vertical y horizontal de la función exponencial de la forma $f(x) = b^x \pm k$ y $f(x) = b^{x \pm h}$, respectivamente al variar los parámetros k y h

Desplazamiento horizontal

a) En el archivo Actividad_9.ggb represente la gráfica $f(x) = 3^x + a$, sí $-2 \leq a \leq 2$, de tal forma que se muestre el desplazamiento de la función

b) Del gráfico obtenido en a) analicen que representa el valor de a y como ayuda el deslizador a comprender el desplazamiento de la función

c) Del gráfico obtenido en a) completen el cuadro con algunos valores de a

Función: $f(x) = 3^x + a$	**Valor de a**	**Interpretación del desplazamiento**

Desplazamiento vertical

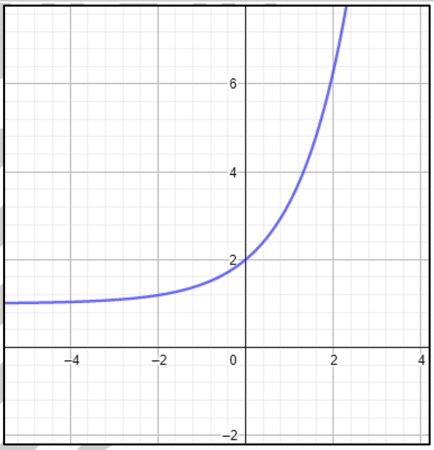
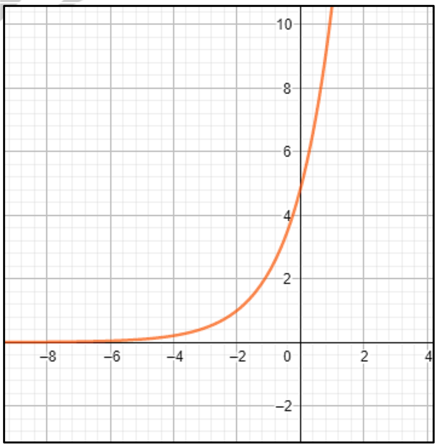
a) En el archivo Actividad_9.ggb represente la gráfica $g(x) = 2^{x+k}$, sí $-2 \leq k \leq 2$, de tal forma que se muestre el desplazamiento de la función

b) Del gráfico obtenido en a) escriban que representa el valor de k y como ayuda el deslizador a comprender el desplazamiento de la función

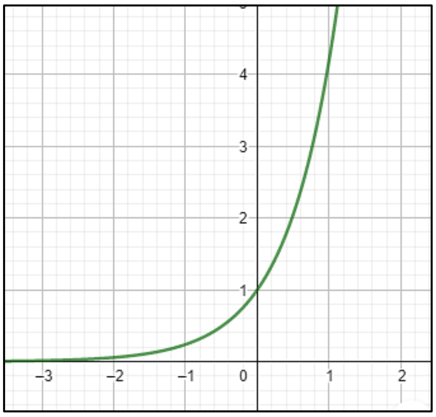
c) Del gráfico obtenido en a) completen el cuadro

Función: $g(x) = 3^{x+k}$	**Valor de b**	**Desplazamiento**	**Asíntota horizontal**

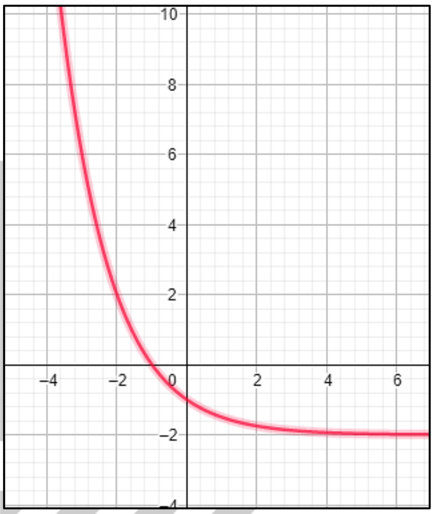
d) En el GeoGebra efectúen transformaciones a la función $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2^x$ para determinar la relación de las funciones de la columna I con su grafica correspondiente de la columna II. A continuación, muestren las relaciones a través de flechas.

Columna I	**Columna II**
A. $y = 4g(x)$	
B. $y = 2f(x) + 1$	

C. $y = g(-x) - 2$



D. $y = 2g(x + 2)$



Al culminar, salven las modificaciones o construcciones en este archivo haciendo clic consecutivamente en “Archivo > Guardar” de la barra de menús de GeoGebra. Cierren el archivo y continúen con la siguiente pregunta