Facultad de Filosofía, Educación y Ciencias Humanas

# Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de educación primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales.

Tesis para optar el Título de Licenciada en Educación Secundaria en la Especialidad de Matemática


Presenta la Bachiller:

OLIMPIA ROSA CASTRO MORA

Presidente : Milagros del Carmen Gonzales Miñán

Asesor : Milagros Edith Carrillo Yalán

Lector : Carolina Rita Reaño Paredes



LIMA, PERÚ

2017

**Dedicatoria:**

A mi querido esposo e hijos,

por ser fuente de mi inspiración y perseverancia.

**Agradecimientos:**

A Dios, por sus bendiciones e infinita bondad, haciendo posible llegar a este momento.

A mi familia, por el apoyo constante en mi vida.

A mi asesora de tesis, Mg. Milagros Edith Carrillo Yalán, por su orientación y dedicación.

**RESUMEN:**

La comprensión del concepto de fracción es uno de los aspectos de mayor dificultad en los estudiantes aun al término de la secundaria y sin embargo es a su vez uno de los principales propósitos a ser alcanzado en la escolaridad. Este trabajo se propone mostrar los elementos que se deben considerar para formar el concepto de fracción a la luz de la Teoría de Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud y los significados de las fracciones que se deben desarrollar para poder resolver diferentes situaciones que se presentan. Ambos aspectos, campos conceptuales y significado de las fracciones, deben ser incluidos en la formación de futuros profesores, especialmente de primaria, para garantizar desde los primeros grados la comprensión del concepto de fracción y sus diversas aplicaciones.

**PALABRA CLAVE:**

Campos conceptuales, situaciones, representaciones, significados de fracción

**ABSTRACT**

The comprehension of the fraction's concept is one of the most difficult aspects for students even at the end of high school and, however, it is at the same time one of the main purposes to be achieved at school. The purpose of this research is to show the elements to be considered in order to build the concept of fraction on the basis of the Theory of Conceptual Fields by Gerard Vergnaud and the meanings of fractions that must be developed in order to solve different situations. Both aspects, conceptual fields and fraction's meanings must be included in the education of future teachers, especially for those of elementary school, in order to guarantee, from the earliest grades, the comprehension of the concept of fraction and its different applications.

**KEYWORDS:**

Conceptual fields, situations, representations, meanings of fraction

# ÍNDICE

**Lista de Tablas**

## Lista de Figuras

# INTRODUCCIÓN

Desde los primeros ciclos de la escolaridad se viene trabajando, en las instituciones educativas, el aprendizaje de las fracciones, como lo señala el currículo nacional. El propósito fundamental es alcanzar desde la primaria la comprensión del concepto de fracción para posteriormente, sobre ello, se puedan construir otros aprendizajes como es el conjunto de números racionales. Sin embargo, las evidencias recogidas en las evaluaciones estandarizadas nacionales indican que la comprensión de las fracciones es una gran dificultad y los estudiantes no logran tener desempeños aceptables al aplicar estas nociones. Se sabe que dificultades como estas tienen su punto de partida no solo en el aprendizaje sino también en la enseñanza.

Algunas investigaciones señalan que la dificultad en el aprendizaje de las fracciones puede deberse a diversos factores, como es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, situaciones muy sencillas y por lo general, tareas en un solo sentido tendiendo a la memorización de procedimientos. Por ello, para identificar uno de los posibles factores que influyen en este problema, es nuestro interés investigar en un grupo de estudiantes, futuros docentes de educación primaria, acerca de la comprensión de fracción, sus diferentes significados y las diversas representaciones que ellos manejan.

Como el objeto de estudio es la comprensión del concepto de fracción, hemos basado esta investigación en el marco de la Teoría de Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud. Con esta teoría nos podemos centrar en analizar la adquisición de los contenidos matemáticos referentes a la fracción basándonos en la construcción de los campos conceptuales, constituidos por un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos, de representaciones que están en estrecha relación. De esta manera se apunta a una visión del desarrollo cognitivo para formar conceptos, relacionarlo con otros conceptos afines y ver el progreso del mismo dándole sentido según su significado en las situaciones.

La presente investigación se ha estructurado en siete capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo I, se expone la contextualización del problema de investigación, la presentación de la problemática, los antecedentes, la justificación del estudio, la formulación del problema y los objetivos de la investigación.

En el capítulo II, se presenta el desenvolvimiento histórico de fracciones, es decir, un estudio de la génesis de las fracciones a través del desarrollo de la humanidad y de las culturas.

El capítulo III contiene las distintas concepciones que hay de las terminologías fracción, números fraccionarios y números racionales y se expresan las diferencias entre ellos.

En el capítulo IV, se presentan los fundamentos teóricos que guiaron el trabajo, considerando la Teoría de Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud y las concepciones de fracción explicadas desde su significado en cada caso, dados por Thomas Kieren.

En el capítulo V, se presenta la metodología de la investigación; se hace una descripción detallada de cada fase del proceso seguido, diagnóstico, ejecución y evaluación. Se describen los instrumentos utilizados, se explica cómo se desarrolló cada encuentro y el procedimiento para realizar el análisis de las actividades basado en el concepto de fracción, los diferentes significados, las diversas representaciones, así como las dificultades presentadas en el proceso.

En el capítulo VI se dan consideraciones finales señalando la importancia de trabajar con situaciones contextualizadas, con variedad de materiales y haciendo uso de diversas representaciones, así como explicar las dificultades que se mantienen en este proceso, y en el capítulo VII se presentan sugerencias para futuras investigaciones.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas que se utilizaron a través de las diferentes fases de este trabajo.

# CAPÍTULO I

# PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN

## 1.1. Presentación de la Problemática

En la última década, en el Perú, el Ministerio de Educación ha aplicado evaluaciones estandarizadas a los estudiantes de algunos grados de primaria y secundaria para medir su rendimiento en varias áreas, entre ellas, la competencia matemática. Los resultados de estas pruebas se presentan clasificando a los estudiantes evaluados en niveles de logro, siendo lo esperado el Nivel Satisfactorio. En este nivel se encuentran los estudiantes que han logrado los aprendizajes propios del grado y ciclo correspondiente de escolaridad y que están preparados para seguir afrontando los retos de aprendizaje de los ciclos siguientes (Minedu, 2016a).

Los resultados obtenidos en diferentes evaluaciones estandarizadas en este periodo expresan las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática, en especial en la competencia: Resuelve problemas de cantidad. En la Evaluación Nacional del 2004 (EN2004) se tuvo, con respecto al rendimiento de los estudiantes de sexto grado de primaria, solo un 7,9 % de estos alcanzaron un nivel satisfactorio (Minedu, 2005b). De la misma manera, en diciembre del 2013 se aplicó una Evaluación Muestral (EM2013), con representatividad a nivel nacional, a los estudiantes de sexto grado de primaria, de la cual resultó que solo el 16 % de estos están en nivel de logro satisfactorio en lo referente al aprendizaje de las matemáticas (Minedu, 2016b).

De entre los aspectos evaluados que nos llaman a la reflexión, destacamos la competencia: Resuelve problemas de cantidad y, de manera particular, queremos analizar la adquisición del concepto de fracción. Si bien el estudiante trae ya nociones de fracción de su vida cotidiana, como cuando divide un pan por la mitad o sabe lo que te toca cuando un chocolate se reparte entre tres amigos, en la escolaridad, es desde cuarto grado de primaria (IV ciclo) que se trabaja en las primeras nociones y representaciones de fracción, y al culminar el V ciclo, sexto grado de primaria, el estudiante ya debe haber adquirido diversos conceptos de fracción de manera sólida para operar con ellos y resolver situaciones futuras como lo señala el Diseño Curricular actual y se muestra en el Anexo 1.

Con esta base, se espera que los estudiantes consoliden el concepto de fracción en el VI ciclo de escolaridad y que, con ello, en segundo de secundaria se realice adecuadamente la extensión de los conjuntos numéricos, con lo que accederán al aprendizaje de los números racionales.

Sin embargo, en noviembre de 2015, el Ministerio de Educación evaluó con carácter censal a los estudiantes de segundo grado de secundaria en la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE 2015) en las competencias de Lectura y Matemática, es decir, evaluó a todos los estudiantes del país de la Educación Básica Regular en un proceso que alcanzó una cobertura nacional de 94,4 % de estudiantes evaluados. En esta evaluación, en lo correspondiente a la competencia matemática, solo el 9,4 % de los estudiantes alcanzó el nivel satisfactorio (Minedu, 2016a). Estos resultados nos llevan a reflexionar y a buscar en qué radica la dificultad del aprendizaje de la Matemática en nuestros estudiantes a lo largo de la escolaridad, especialmente en lo correspondiente a la competencia de cantidad.

En la ECE 2015 de segundo de secundaria se evidenció que los estudiantes no logran consolidar los aprendizajes correspondientes al grado, en especial en lo referente a la competencia de cantidad. Entre las tareas que se han publicado de esta evaluación están las que muestran el desempeño de los estudiantes en cuanto al concepto de fracción. Se observó que un reducido grupo de estudiantes terminan segundo de secundaria consolidando dichas nociones, es decir, en gran parte de ellos persisten dificultades para resolver tareas como la mostrada en la figura 1:

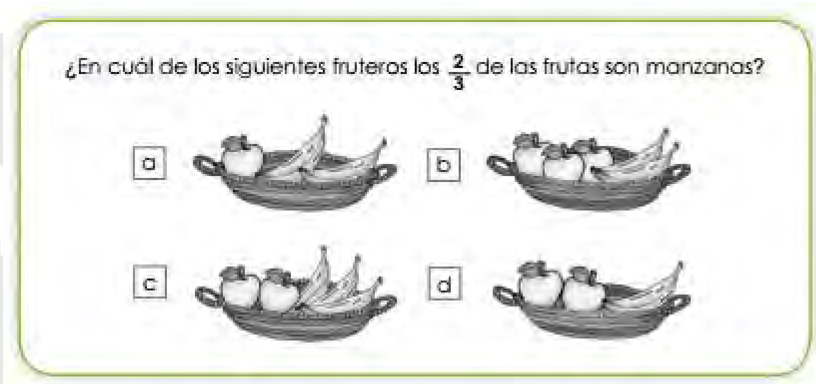



*Figura 1.* Representación gráfica de una fracción. Concepción de parte-todo discreto.
Fuente: Minedu, 2016a, p. 18

Aproximadamente solo el 40 % de estudiantes logra identificar la representación de una fracción en su forma gráfica y su significado como parte-todo discreto. Este grupo de estudiantes logró identificar que, de las 3 frutas en el frutero, 2 de ellas son manzanas, marcando como respuesta correcta la alternativa d), utilizando muy probablemente el proceso de doble conteo, es decir, contar la cantidad de elementos o partes que hay en la unidad y volver a contar la cantidad de elementos o partes que tienen alguna característica señalada. En este caso, el doble conteo sería dado por contar dónde hay 3 frutas y volver a contar en cuál de ellas hay 2 que son manzanas. Casi el 55 % de los estudiantes marcaron las alternativas b) o c). Ello muestra la concepción de la fracción como el arreglo de dos cantidades naturales, por eso señalan las situaciones que muestran 2 de un tipo de fruta y 3 del otro tipo. Esto evidencia que los estudiantes no logran comprender todos los conceptos de fracción, en este caso como parte-todo en situaciones discretas.

También se pudo evidenciar que solo el 24 % de los estudiantes de segundo de secundaria puede aplicar el concepto de fracción para resolver situaciones que involucran comparación de cantidades. Esto se evidenció en tareas como la figura 2:


*Figura 2.* Uso de las fracciones. Comparación de fracciones.
Fuente: Minedu, 2016a, p. 15

Estas tareas confirman que los estudiantes manejan concepciones erróneas de las fracciones. Las perciben como un arreglo de números separados con rutinas mecánicas, mas no como un número fraccionario que expresa una cantidad y que esta puede ser comparada con otros números fraccionarios y establecer una relación de orden entre ellos.

Esta tarea pide atender a dos condiciones: primero buscar una cantidad que sea mayor que $\frac{1}{4}$, lo que hace descartar $\frac{1}{8}$; luego pide buscar una cantidad que sea menor que $\frac{1}{2}$, lo que lleva a elegir la alternativa c) $\frac{3}{8}$ ya que las otras dos fracciones son mayores que $\frac{1}{2}$. El procedimiento a seguir pudo ser muy variado y valerse de diversas estrategias, pero en cualquiera de sus formas se evidencia el concepto de fracción como parte todo-continuo.

Estos resultados dan evidencia de que en la escuela no se trabaja de manera adecuada sobre el concepto de la fracción en sus distintos significados. Desde un inicio suele verse como un todo dividido en partes iguales, donde la representación gráfica es un soporte de mucha ayuda para la comprensión, y probablemente este es el único significado dado a la fracción durante toda la escolaridad. Sin embargo, este no es suficiente para la comprensión cabal de este concepto puesto que el estudiante no estaría en la capacidad de resolver situaciones que surgen de la aplicación de diversos significados de fracción además del de parte-todo como, por ejemplo, la fracción surgida de un proceso de medida o de la comparación entre dos cantidades. El aprendizaje único de la noción parte-todo limitaría la comprensión de ciertos tipos de número, por ende, ¿cómo se explicaría posteriormente el número mixto o la fracción impropia?

Las investigaciones (Perera y Valdemoros, 2007) señalan que son las fracciones uno de los contenidos de la Matemática que presentan mayores dificultades en los niveles básicos de la educación, tanto en su enseñanza como en el aprendizaje. De esta manera, la enseñanza de las fracciones es una de las tareas más complejas en la primaria, lo que se debería a varias razones, entre ellas el desconocimiento por parte del docente como del estudiante sobre el concepto de fracción. Por ello, el presente estudio examina algunos aspectos de la dificultad en la comprensión del concepto de fracción y sus distintos significados según las situaciones planteadas.

Entre los factores que pueden explicar el bajo desempeño de los estudiantes en Matemática, específicamente con fracciones, De León y Fuenlabrada (1996) señalan que, entre otras razones, se debe a «la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar. Se sabe que la enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad así como el dominio en las reglas de cálculo, dejando de lado una gran variedad de situaciones que están vinculadas con el significado de las fracciones». Asimismo, los autores hacen mención al débil conocimiento por parte del maestro de los esquemas para comprender los significados de las fracciones, lo que lleva al uso prematuro del lenguaje convencional como al uso de los algoritmos que, sin manejo de conceptos, pierde sentido. Los saberes aprendidos de esta manera solo sirven para situaciones de aula, mas no como herramientas para resolver problemas.

Los resultados mencionados y situaciones como las descritas son elementos que confirman lo que las investigaciones han señalado con anterioridad: que la fracción como parte-todo surge más como un recurso didáctico que como respuesta a necesidades de la vida cotidiana a través de los tiempos. Así afirman Escolano y Gairín (2005):

> La fracción con significado parte-todo no surge de necesidades humanas (en el sentido que nombra Bishop, 1999), puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitud –bien realizada directamente o para expresar el resultado de un reparto–, o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón. (p. 22-23)

Esto explica por qué el significado de la fracción parte-todo se ha priorizado en el proceso de instrucción, ya que permite de manera más clara y rápida su comprensión por tener su base en la representación simbólica de la fracción y ofrece buenos resultados a corto plazo.

Las investigaciones señalan cómo ha surgido con fines didácticos este significado de fracción parte-todo al analizar su presentación y tratamiento en los textos escolares y en otros estudios de campo. También existe una variedad de investigaciones que resaltan la trayectoria histórica de las fracciones como respuesta a las necesidades de la actividad humana. A continuación se menciona algunos estudios realizados acerca del concepto de fracción en algunos de estos aspectos.

## 1.2. Antecedentes

Se han realizado diversas investigaciones que sirven de sustento científico y permiten atender a diversos aspectos de cómo se aborda el concepto de fracción según sus significados en diversas situaciones, tanto en el aprendizaje de los estudiantes como de los docentes o futuros docentes y la manera en cómo se aborda en algunos materiales de trabajo. Estos estudios ponen de manifiesto cómo el trabajar solo algunos significados obstaculiza la formación de nociones adecuadas de fracción. Entre ellos se tiene a:

- Claudia Hincapié Morales (2011), quien indaga en los estudiantes de secundaria las dificultades que tienen en conocer los significados de las fracciones de un campo conceptual que se aborda progresivamente a través de una variedad de estrategias y procedimientos. Sugiere comenzar estas nociones desde los primeros grados de la escolaridad con recursos que faciliten esta comprensión a partir de situaciones concretas.

- Milagros Carrillo Yalán (2012), quien realizó un análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria enmarcado en los lineamientos de la Teoría Antropológica. En este estudio se pone en evidencia que en los textos escolares predomina la noción de fracción como parte-todo y en pocos casos la fracción como operador, denominado fracción de un número, en los cuales se enfatizan operaciones de dividir con el denominador y multiplicar con el numerador, sin desarrollar las otras concepciones de igual forma. Tratamientos de este tipo permiten continuar con el trabajo de los números naturales, mas no ingresar al trabajo con los racionales positivos.

- Rebeca Flores García (2010) realizó una investigación para ver en qué medida se desarrollan los conceptos de fracción tanto en los alumnos como en los profesores. Afirma que en las aulas no se trabaja todos los significados de la fracción y que hay una práctica frecuente por la cual se pasa de manera rápida del manejo de fracciones al de decimales, trabajo que resulta muy operativo y en la escasa comprensión del número fraccionario.

- Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez (2007) investigaron a través de una enseñanza experimental con alumnos de cuarto grado de una escuela pública, buscando estrategias de cómo trabajar las diferentes concepciones de las fracciones aplicando una enseñanza constructivista basada en situaciones realistas y lúdicas. Sostienen que presentando situaciones didácticas donde se recurra a contextos problemáticos reales y de uso de diferentes representaciones, se puede alcanzar una firme comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes.

- También Wenceslao Quispe y otros (2008) han realizado investigaciones sobre las concepciones de la fracción en estudiantes de los cinco años de escolaridad y manifiestan que existe interferencia de significado parte-todo y no permite la interpretación de los otros significados dados. Esto tiene relación directa con la posibilidad de resolver las operaciones con fracciones, el manejo de algoritmos y el conocimiento de las propiedades del número racional.

- En su mayoría, las investigaciones toman como referencia la clasificación de Kieren (1999), quien admite en el concepto de fracción los cinco significados según las situaciones planteadas, ellas son: parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Con ello fundamenta la comprensión del concepto de fracción a partir de las situaciones planteadas en la vida real que dan soporte y significado a cada noción.

- María José Ferreira Da Silva (2005) investigó a un grupo de profesores sobre el concepto de números fraccionarios, su aprendizaje y dificultades que tienen los estudiantes de 5.º de primaria al trabajar con el tema de fracciones. Entre sus conclusiones indica que los profesores construyen aprendizajes de forma muy rígida con cada tipo de tarea, así, predomina un concepto de parte-todo basado en el proceso de doble conteo. Además, sostiene que las dificultades de los alumnos del 5.º grado de primaria al

> tratar el tema de fracciones tienen relación con los conceptos que dominan los docentes. Ya que solo algunos de los significados de la fracción conocida por los maestros (por lo general el concepto de parte-todo), es este el que generalmente se imparte en las clases, lo que provoca limitaciones en la comprensión del concepto y hasta la ruptura en la relación entre fracción y sus usos, como la aparición del número mixto al medir o usar la fracción como razón al comparar. Esto hace que los docentes recurran al uso de técnicas rígidas, centradas en procedimientos mecánicos poco comprendidos para lograr responder a ciertos tipos de problemas que no abordan todos los significados de las fracciones. Sugiere en su investigación elaborar una organización matemática que considere las demás concepciones de números fraccionarios y las relaciones entre sí, de manera que las concepciones de medida, cociente y razón se puedan asociar directamente con las concepciones de parte-todo y operador, lo cual permitiría consolidar el concepto de fracción y sentar las bases para la construcción del campo de los números racionales.

De manera general, todas las investigaciones mencionadas brindan evidencias de las dificultades encontradas en los estudiantes al construir el concepto de fracción. Corroboran que gran parte de esta dificultad radica en que en las aulas no se abordan todos los significados de este constructo. Señalan también que los libros de texto atienden a estos significados de manera incompleta, centrándose en algunas representaciones sobre todo gráficas y no dando énfasis en los significados, lo que afecta la comprensión y resolución de diversos problemas con fracciones. Otro aspecto en los que aportan las investigaciones mencionadas es la evidencia de cómo influye en el aprendizaje el escaso dominio por parte de los docentes de las estrategias adecuadas de enseñanza de las fracciones puesto que se enfocan en la representación gráfica y simbólica y muchas veces ausente de situaciones contextualizadas. Así menciona Perera y Valdemoros (2007), que si la enseñanza se centra en el desarrollo de conceptos solo se instruye en el aspecto formal de las definiciones y no logra establecer las relaciones con otros contenidos matemáticos ni en la propia experiencia del estudiante. Con ello se denota la importancia del rol del docente en el proceso de aprendizaje del estudiante.

Puede relacionarse esta problemática, con la preparación que vienen recibiendo los futuros docentes en las universidades o institutos de formación, donde se puede abordar el estudio de los niños de manera universalista y no corresponde a las situaciones propias de su contexto. Según Castaño (2014), también puede ser que:

> … los profesores escogen una teoría que les parece adecuada para enseñar, pero en el aula no la utilizan sino que se inclinan por prácticas de enseñanza cotidiana, tradicionalista y ligada a las experiencias de su formación durante la infancia y la adolescencia. (p. 13)

### 1.3. Justificación del Estudio

En los documentos oficiales para la enseñanza de la Matemática como Diseño Curricular, Mapas de Progreso o Rutas de Aprendizaje y, actualmente, la Resolución Ministerial 199-2015, se resalta la importancia de desarrollar la competencia matemática en todos los estudiantes a lo largo de la Educación Básica Regular. Esto implica desarrollar habilidades y conocimientos matemáticos para usarlos en la solución de situaciones problemáticas y que le permitan formarse como ciudadanos participativos, capaces de tomar decisiones responsables y así afrontar exitosamente su medio y poder transformarlo.

Por ello, al realizar un análisis a nuestro nuevo currículo observamos que las nociones de fracción deben darse a partir de tercer grado de primaria con los significados de parte-todo con fracciones usuales, usando lenguaje numérico y diversas representaciones, además de encontrar equivalencias entre fracciones. Para el quinto y sexto grado de primaria, señala ampliar la noción de fracción como operador y como cociente, realizar operaciones con fracciones usando diversas estrategias y también equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales. En el VI ciclo, al comenzar la secundaria, se pide resolver operaciones y problemas en diversos conjuntos numéricos que incluyen los racionales (Minedu, 2016c), como se muestra en el Anexo I.

De esta manera, se confirma la importancia que tiene el desarrollar el concepto de fracción a través de sus diferentes significados que se aprenden gradualmente a lo largo de la escolaridad. Como vemos, la comprensión del concepto de fracción es un objetivo fundamental que se debe alcanzar desde los primeros grados de la escolaridad. En esta misma línea lo indica el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000) y señala en su propuesta que en los grados 5.°, 6.°, 7.° y 8.° uno de los estándares de números se refiere a las fracciones y que el estudiante debe alcanzar el desarrollo de habilidades y flexibilidad operatoria con los números racionales.

Por las experiencias de clases, así como por las evidencias recogidas en las pruebas estandarizadas de Matemática, se observa que los estudiantes de Educación Básica Regular culminan la primaria sin alcanzar un adecuado aprendizaje en lo correspondiente a los conceptos de fracciones. Por los resultados obtenidos en 2015, hay evidencia que un grupo muy reducido de estudiantes alcanzan estos conceptos de fracciones en segundo de secundaria, mostrando aún dificultades en aplicar dichos conocimientos en la resolución de problemas. Esto se debería a que no se aborda los significados de las fracciones y solo se enfatiza su representación gráfica o simbólica, como también a que se priorice el manejo de procedimientos y reglas ya establecidas, con predominio de manejo algorítmico, con datos explícitos y que permiten resolver situaciones que requieran del uso de fracciones sin la necesidad de llegar a la comprensión de los mismos y, por lo tanto, se tendría un uso bastante limitado del concepto de fracción.

Estas dificultades impiden comprender a cabalidad el nuevo conjunto numérico que estarían aprendiendo, el de los racionales. Así se observa que en lo que respecta a fracciones, los estudiantes de segundo de secundaria pueden clasificar fracciones en propias e impropias, convertirlas a números mixtos, simplificarlas o encontrar fracciones equivalentes, inclusive operar con ellas, todo ello siguiendo instrucciones de procedimientos y en gran parte sin poder explicarlo. Por otro lado, cuando tienen que usar fracciones en una situación problemática no saben qué decisión tomar, no logran distinguir el significado de la fracción que corresponde al contexto dado ni mucho menos explicar por qué procede de dicha manera.

Algunas investigaciones señalan que las dificultades presentadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones puede deberse a diversos factores, entre ellos la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar, en tareas de aula que son simples y con un solo sentido, lo cual tendría su origen en los docentes, quienes en determinadas circunstancias imparten razonamientos inconsistentes, procedimientos aislados de los conceptos, errores en los significados que aplican y falta de estrategias metacognitivas para dirigir procesos de solución. Así, De León y Fuenlabrada (1996) señalan que parte de este fracaso es por el desconocimiento por parte de los docentes quienes

> … plantean a los niños de manera prematura el uso del lenguaje convencional y los algoritmos sin reconocer que se necesitan ciertos esquemas (de partición, de equivalencia, conservación del área, etcétera) para darle sentido al lenguaje simbólico y las reglas de cálculo. (p. 2)

Estos aprendizajes son limitados al ser de aplicación directa al aula, mas no se constituyen como una herramienta para resolver problemas. En este caso, al no comprenderse el concepto de fracción en sus diferentes significados, genera a los estudiantes dificultades para alcanzar otros aprendizajes que tienen como base estos conocimientos, como son los decimales, los porcentajes, las razones y proporciones, semejanza de figuras, entre otros.

Este estudio pretende demostrar a los docentes de que no solo se debe enseñar el objeto matemático, la fracción, sino también se construye el concepto atendiendo a sus significados con procesos matemáticos dentro del enfoque funcional de la Matemática. También brindará información sobre cuáles son los conceptos de fracción, cuál es su importancia para un aprendizaje razonado de fracción y cómo se representa y aplica cada uno de estos conceptos al resolver situaciones problemáticas.

Las diversas representaciones y los distintos significados de la fracción son elementos fundamentales para construir el concepto de fracción y otras nociones matemáticas, donde se evidencia la importancia de estos conceptos como base de otros conocimientos matemáticos, entre ellos la noción de número racional, como se muestra en la figura 3. (Minedu, 2016a)


*Figura 3.* Aspectos involucrados en la construcción del número racional
Fuente: Minedu (2016a).

Estas nociones se construyen desde la primaria y se desarrollan a lo largo de toda la escolaridad.

## 1.4. Formulación del Problema

Las dificultades planteadas para el aprendizaje de los conceptos de fracción podrían estar relacionadas a la forma como se aborda en la escuela esta noción, de manera instructiva y basada en la representación de un modelo simbólico abstracto, como también puede deberse al conocimiento restringido por parte del docente de los significados de la fracción. Por ello, es nuestro interés investigar en los docentes en formación con respecto a los conceptos de fracción, en qué medida manejan los distintos significados de fracciones y tienen dominio en la representación de estas y su aplicación en situaciones reales. Con este fin es que la investigación se centrará en el grupo de estudiantes en formación inicial de educación primaria sobre el que se planteará la siguiente pregunta: ¿Cómo fortalecer el dominio y la comprensión del concepto de fracción en los docentes en formación inicial de primaria?

## 1.5. Objetivos de la Investigación

### 1.5.1. Objetivo General

Analizar las concepciones de fracción que tienen los docentes en formación inicial de primaria a fin de proponer una guía de trabajo que les permita fortalecer la comprensión del concepto de fracción en sus distintos significados a partir de una variedad de contextos y del uso de diversas representaciones.

### 1.5.2. Objetivos Específicos

1. Describir la evaluación diagnóstica y una guía de trabajo a partir de situaciones problemáticas donde se muestra las diversas interpretaciones de fracción.
2. Realizar un análisis sobre la comprensión del concepto de fracción que poseen los alumnos en formación inicial de primaria y la efectividad de las actividades propuestas en la guía.
3. Presentar una propuesta para mejorar y fortalecer el dominio del concepto de fracción.

# CAPÍTULO II

## DESENVOLVIMIENTO HISTÓRICO DE FRACCIONES

En esta parte de la investigación presentaremos de manera breve el desarrollo de las fracciones a través de la historia Es importante conocer qué son las fracciones, cuándo y cómo surgen las fracciones en la historia de la humanidad, cuál es su importancia y para qué puede servirnos en la actualidad.

Entre los conocimientos matemáticos aparecidos desde el inicio de la historia figura el concepto de número, el cual se manifiesta a través del uso de los números naturales. Con ellos se facilitaba el conteo de cantidades, la medida de magnitudes y con ellos se podía resolver algunas situaciones de la vida diaria como agregar, quitar o repartir cantidades, por lo cual surgen los primeros sistemas numéricos. Entre estos usos de los números son las situaciones de reparto las que crean la necesidad de usar otros tipos de números, pues los números naturales ya no eran suficientes para expresar las cantidades que aparecen como resultado del reparto, a veces menores o mayores que la unidad.

Por tanto, atendiendo a las situaciones a lo largo de la historia, se puede distinguir dos motivos principales por los que aparecieron las fracciones: el primero fue la existencia de divisiones inexactas y el segundo resultó de la aplicación de los números para expresar la medida en situaciones de medición como la de longitud.

No se conoce con exactitud la fecha y el lugar exacto en qué se descubrió los números naturales, pero hay vestigios muy antiguos que muestran la presencia de este concepto en algunas culturas como China, India, Mesopotamia y Egipto, las cuales muestran asimismo las primeras notaciones de fracciones.

## 2.1. Egipto

Los egipcios utilizaron el sistema de numeración base 10 no posicional y usaron el principio aditivo para la posición de los símbolos. La escritura generalmente es de derecha a izquierda. El principio aditivo sirve para expresar cualquier número haciendo uso de cada símbolo que se puede repetir el número de veces que sea necesario. La escritura jeroglífica aparece en tumbas, monumentos y piedras.

Los símbolos para cada potencia de diez son:

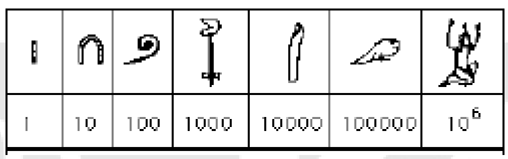



*Figura 4*. Numerales jeroglíficos egipcios.
Fuente: Ruiz (2013).

En la Figura 5, las tres formas representan el número 1232. Todas estas representaciones son igualmente válidas y no son afectadas por el orden en el jeroglífico.

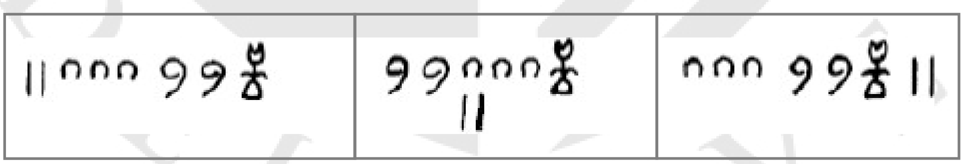


*Figura 5.* Tres representaciones diferentes para el número 1232.
Fuente: Ruiz (2013).

En la civilización Egipcia la fracción tiene su origen en un contexto de medida y reparto, como el reparto de tierras ya que por entonces se entregaba tributo al faraón lo cual instó a que los egipcios hallaran la forma de distribuir de forma equitativa su producción. De ahí que las fracciones estuvieran presentes en contextos de contabilidad y trabajo.

Los egipcios desarrollaron también un sistema de representación fraccionaria y toda una aritmética para calcular con tales números. La figura 6 muestra algunas fracciones de este sistema.

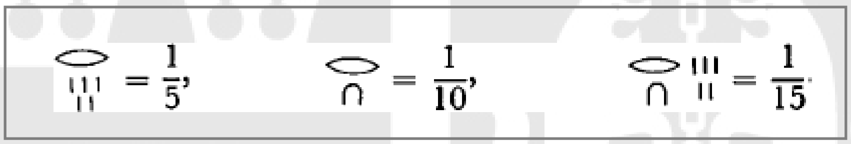



*Figura 6.* Representación de algunas fracciones en forma jeroglífica.
Fuente: Ruiz (2013).

De ese modo, los números ½, ⅓, ¼ y ⅔ tenían símbolos especiales. Inicialmente se colocaba una pequeña elipse que significa parte ubicada encima del símbolo de un número natural utilizado como denominador. Así tenemos:


*Figura 7.* Símbolos que representaban las fracciones en los egipcios.
Fuente: Hurtado (2012).

A estos símbolos de la forma 1/n se le denomina fracción unitaria. Sin embargo, para los egipcios, no existía un símbolo para el número 2/5 y su representación era con la descomposición de la fracción dada en varias fracciones unitarias. De esta manera, 2/5 se representaba con la suma 1/3 + 1/15, lo que llevaba a realizar cálculos fraccionarios de todo tipo. Los pasos seguidos son:

- Para $\frac{2}{5}$, se divide 5÷2.
- Se toma el cociente y se aumenta 1, lo que forma la fracción unitaria.
- Se resta $\frac{2}{5}$ con la fracción encontrada.
- Luego se divide 15 ÷ 1 y, como es división entera, se termina ahí.
- Entonces $\frac{2}{5}$ equivale a $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

cociente 2

Cociente más 1 es 3

La fracción unitaria es $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

En Carrillo (2012) se explica la técnica seguida por los egipcios para representar una fracción $\frac{a}{b}$ cuyo símbolo no es conocido. Esta representación se hace basada en la suma de fracciones unitarias que resulte $\frac{a}{b}$.

a) Para la fracción $\frac{a}{b}$ dividimos b por a y la tomamos como primera fracción unitaria.

b) Siendo Q el cociente de la división b ÷ a, se le aumenta 1 y se forma la fracción unitaria $\frac{1}{Q+1}$.

c) Se resta la fracción anterior y la que se obtuvo: $\frac{a}{b} - \frac{1}{Q+1} = \frac{a_1}{b_1}$.

d) Luego repetimos el mismo proceso hasta que la división sea una división exacta.

Hay situaciones de reparto presentadas en el papiro de Rhind (escrito hacia el 1650 a. C.) donde se puede apreciar que los egipcios expresaban las fracciones como la suma de fracciones unitarias. Hurtado (2012) explica la forma como se repartía 3 panes entre 5 personas: para tal efecto dividían cada pan en dos partes iguales y daban un pedazo a cada persona. El medio pan restante era dividido en 5 pedazos, por lo que cada uno de ellos equivale a 1/10 de pan. Entonces, cada una de las cinco personas recibía 1/2 + 1/10, lo que equivale a 6/10 que es 3/5, la fracción deseada.

Así: $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

En general, se cree que este papiro tenía fines didácticos por la forma como se presentan estas tareas. Cabe resaltar que los egipcios solo usaron fracciones unitarias, empero, se ha conocido solo dos excepciones de fracciones además de las unitarias en las representaciones de los otros números, que son $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

Al respecto, $\frac{2}{3}$ parece tener una gran relevancia en estos cálculos que se realizan. Por ejemplo en el papiro de Ahmes se presenta el siguiente problema basado en la duplicación de las cantidades y en un razonamiento proporcional del mismo con manejo de fracciones unitarias. Indica que se va a repartir una hogaza de pan entre 10 personas y para ello, el razonamiento seguido fue el siguiente (Boyer, 1986):

**Repartir 1 hogaza de pan entre 10 personas**

1 hombre recibe 1/10 de hogaza

2 hombres reciben 2/10 de hogaza, es decir, 1/5

4 hombres reciben 2/5 de hogaza que es 1/3 + 1/15

8 hombres reciben 2/3 y 2/15 de hogaza, es decir 2/3 + 1/10 + 1/30

10 hombres reciben lo de 8 hombres más 2 hombres, esto es

2/3 + 1/10 + 1/30 + 1/5 de hogaza, es decir, la hogaza completa.

Entre las tareas presentadas en los papiros de Rhind, se encuentra una tabla que presenta las descomposiciones de fracciones unitarias de números de tipo n/10, donde n varía de 1 a 9. Nos referimos a las fracciones 1/10, 2/10, 3/10… y sus equivalentes en suma de fracciones unitarias (en algunos casos incluyendo a 2/3) representadas en la Tabla 1.

Tabla 1

*Representación de fracciones n/10 en el papiro Rhind.*

| n | n/10 | n | n/10 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/10 | 6 | 1/2 + 1/10 |
| 2 | 1/5 | 7 | 2/3 + 1/30 |
| 3 | 1/5 + 1/10 | 8 | 2/3 + 1/10 + 1/30 |
| 4 | 1/5 + 1/5 | 9 | 2/3 + 1/5 + 1/30 |
| 5 | 1/2 | | |

*Nota.* Ferreira Da Silva (2005).

Otra tabla encontrada en el papiro de Rhind, representa las fracciones del tipo 2/n, con denominador impar entre 5 y 101, como 2/5, 2/7, 2/13, 2/21…. tal como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2

*Representación de fracciones 2/n en el papiro Rhind.*

| n | 2/n | n | 2/n |
|---|---|---|---|
| 5 | $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ | 17 | $\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$ |
| 7 | $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ | 19 | $\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$ |
| 9 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$ | 21 | $\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ |
| 11 | $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$ | 23 | $\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$ |
| 13 | $\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$ | 25 | $\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$ |
| 15 | $\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ | 27 | $\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$ |

*Nota.* Ferreira Da Silva (2005).

Silva hace mención a las diversas representaciones egipcias que por siglos han sido utilizadas y que se pueden encontrar en diferentes nociones matemáticas como, por ejemplo, la métrica de Herón (100 d. C. aproximadamente):

$$\sqrt{63} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Así como también en el algoritmo para obtener la descomposición de fracciones unitarias:

$$\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{pr} \quad \text{en donde } r = \frac{p+q}{z}$$

Estas representaciones de fracciones unitarias han persistido hasta la Edad Media.

## 2.2. Babilonia

César Ruiz (2013) explica cómo los babilonios utilizaban la base 60 para expresar cantidades que luego relacionan con la notación decimal. Por ejemplo:

El número 2, 4, 1

escrito en notación babilónica significa: $2 \times 60^2 + 4 \times 60^1 + 1 \times 60^0$,

luego, convertido a notación decimal sería: 7200 + 240 + 1 = 7441.

De la misma manera representaron la parte fraccionaria con un punto y coma (;). Así:

El número 3, 3; 1

significa: $3 \times 60^1 + 3 \times 60^0 + 1 \times 60^{-1}$,

luego, convertido a notación decimal sería: 180 + 3 + 1/60 = 183,01666666…

Como se observa, los babilonios usaron el sistema de numeración posicional de base 60 tanto en números enteros como en decimales. También utilizaron fracciones cuyos «denominadores» eran potencias de 60. Cabe recordar que en ese entonces 60 era la base de su sistema de numeración y con él representaban las fracciones de la forma 1/n. Así, por ejemplo, lo que en términos actuales sería 1/2 se representaba como 30/60. Veamos este ejemplo:

$1/8 = 7/60^1 + 30/60^2$, lo cual es cierto, ya que $7/60 + 30/60^2$

$7/60 + 30/3600 = 7/60 + 1/120$

$14/120 + 1/120 \;\; = 15/120 \; = \; 1/8.$

Los babilónicos desarrollaron un sistema de notación fraccionaria muy eficaz, el cual permitió establecer aproximaciones decimales realmente sorprendentes e incluso el desarrollo de nuevas operaciones que ayudaron a la comunidad matemática de siglos posteriores a hacer buenos cálculos de, por ejemplo, las raíces cuadradas.

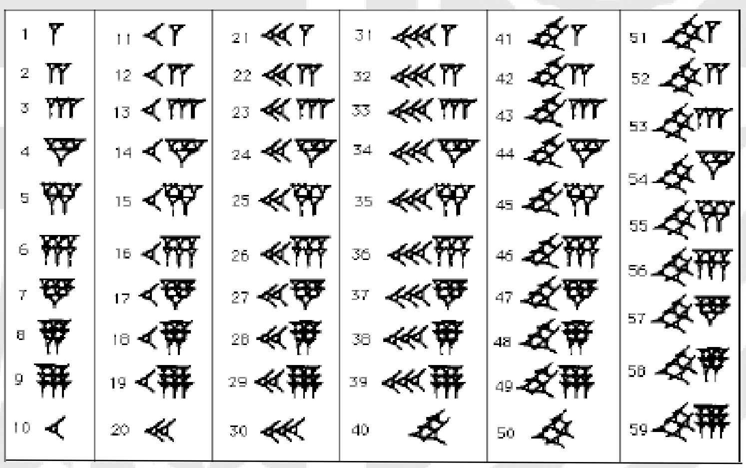



*Figura 8.* Símbolos matemáticos babilónicos.
Fuente: Ruiz (2013)

Para los babilonios era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando su sistema de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento (León, 2011).

Es preciso señalar que tanto babilonios como egipcios dieron a los conocimientos matemáticos, tanto de números naturales como el de fracciones, un uso eminentemente práctico, de aplicación a la vida cotidiana, al comercio, a la

Arquitectura, a la Astronomía, etc. Sin embargo, no existió en ellos la preocupación teórica acerca del concepto de número, como sí se presentó en la cultura griega.

**2.3. Grecia**

Los griegos consideraban como números solamente a los números naturales. Para ellos, la naturaleza se reducía a estos, de manera que todo objeto podía expresarse con un número (medida de su magnitud) y la relación entre objetos (entre sus magnitudes) se consideró como una relación entre números naturales.

Los griegos dieron por hecho que siempre funcionaría el principio de conmensurabilidad, es decir, que, dadas dos magnitudes, siempre era posible encontrar una magnitud menor que «encajara» un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes relacionadas. Esto hacía que la relación encontrada sea representada como aparente cociente de dos números naturales a/b pero no era considerada como un nuevo número «fracción» sino como una razón entre ambas magnitudes. En la Aritmética de los griegos no existieron, pues, las fracciones como números al estilo de los babilonios y egipcios.

Sin embargo, para los griegos, los números fraccionarios estaban asociados a longitudes y efectuaban cálculos con fracciones bastante complicados basados en la razón entre magnitudes. De esta cultura, se atribuye a Pitágoras (569 – 475 a. C.) el descubrimiento de las proporciones que se dan entre los sonidos armónicos, Arquímedes de Siracusa (287 –212 a. C.) utiliza la fracción 10/71 en su aproximación del número PI y Diofanto de Alejandría (s. II d. C.) comienza a usar una notación menos ambigua de fracción en la que coloca al denominador como exponente del numerador.

Estos son algunos ejemplos de números fraccionarios representados por los griegos donde trabajaban con un sistema de numeración alfabético, introduciendo así fracciones con números distintos de la unidad en el numerador, valiéndose para ello de letras. Así se observa en la figura 9.

$$\delta^{|} = \frac{1}{5} \qquad \pi\eta^{|} = \frac{1}{88} \qquad \delta^{\nu\varepsilon} = \frac{4}{55} \qquad \mu\beta^{\eta} = \frac{42}{8} \qquad \overline{\kappa\alpha\varsigma}^{|} = 21\frac{1}{6}$$

*Figura 9.* Números fraccionarios en el sistema de numeración de los griegos.
Fuente: Carrillo (2012).

## 2.4. India

En la India se tuvo como aportes matemáticos los numerales Brahmi, aquellos de los cuales descienden nuestros números actuales, además del sistema de valor posicional y el concepto de cero. Es en la India donde se tuvo el primer sistema decimal y donde el cero tuvo el estatus de número. Es así como los principales problemas de las reglas de aritmética tenían que ver con el cero puesto que, si bien la adición, la sustracción y la multiplicación con el cero se hacían regularmente, la división era una cuestión más sutil.

En este periodo se invirtió la escritura de la fracción que venía desde los griegos quienes escribían el numerador debajo del denominador, de modo que los indios adoptaron la escritura del numerador en la parte superior y del denominador en la parte inferior. Lamentablemente, en esta cultura no se aplicó el nuevo sistema de numeración para los enteros al campo de las fracciones decimales, con lo cual se perdió la ventaja potencial más importante.

## 2.5. China

El sistema numérico de China es de base 10, aunque tiene diferencias muy importantes en la forma en que los números son representados. Los chinos tienen símbolos para los números de 0 a 9, además del símbolo para el cero tal como se muestra en la siguiente tabla.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Traditional | 零 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 萬 | 億 |
| Simplified | 零 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 万 | 亿 |
| Formal Trad. (Daxie) | 零 | 壹 | 貳 | 參 | 肆 | 伍 | 陸 | 柒 | 捌 | 玖 | 拾 | 佰 | 仟 | 萬 | 億 |
| Formal Simp. (Daxie) | 零 | 壹 | 贰 | 参 | 肆 | 伍 | 陆 | 柒 | 捌 | 玖 | 拾 | 佰 | 仟 | 万 | 亿 |
| Pinyin | ling2 | yi1 | er4 | san1 | si4 | wu3 | liu4 | qi1 | ba1 | jiu3 | shi2 | bai3 | qian1 | wan4 | yi4 |

*Figura 10.* Sistema numérico chino.
Fuente: Ruiz, 2013.

En este sistema de base 10, se lee el once como «diez uno» en chino, doce es «diez dos» y así sucesivamente: veinte es «dos diez», veintiuno es « dos diez uno» y así hasta el 99, cien es «uno cien», ciento uno es «uno cien cero uno», ciento once es «uno cien uno diez uno». Esta forma de lectura enfatiza el valor de posición (Ruiz, 2013). Veremos a continuación la escritura de un número en el sistema numérico chino y su interpretación.

Los números fueron escritos usando un sistema posicional, empleando símbolos para las potencias de 10. Por ejemplo, para escribir 3245 se tiene 三千二百四十五, donde:

Tres mil es tres 三 por mil 千.

Doscientos es dos 二 por cien 百

Cuarenta es cuatro 四 por diez 十

Cinco es 五

*Figura 11.* Sistema numérico chino.
Fuente: Ruiz (2013).

Con respecto a las fracciones, en la China antigua ellos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias y encuentran el mínimo común denominador de varias fracciones. Se destaca el hecho de que en la división de fracciones también se lleva previamente a la reducción de las fracciones a común denominador. Los chinos fueron los primeros en adoptar ciertos manejos de carácter decimal para hacer más sencilla la manipulación de las fracciones.

## 2.6. Europa

En Europa predominaban los números romanos, lo que originó que la aceptación del sistema posicional de base 10 sea lenta y gradual con los símbolos indianos. La primera referencia de este sistema se le atribuye a Fibonacci en su libro Liber Abaci de 1202, en el cual presenta la terminología de los números fraccionarios que se utiliza actualmente.

Quando, acima de um número qualquer aparecer uma barra (uirgula), e, acima dessa, for escrito outro número qualquer – o número superior está para o inferior -, o inferior é chamado denominador, e o superior, numerador.

$$\frac{\text{Nominans}}{\text{Denominatus}}$$

Latim

$$\frac{\text{Numeratore}}{\text{Denominatore}}$$

Italiano

$$\frac{\text{Numerum (número) nominator (superior)}}{\text{Numerum (número) denominante (inferior)}}$$

Latim

*Figura 12.* Liber Abbaci de Leonardo de Pisa (1202).
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Ferreira Da Silva (2005) cita a Viéte (1579) señalando que se utilizaba una barra vertical para separar una parte entera de una fraccionaria y recomendaba la representación de fracciones decimales en lugar de sexagesimales. Coincidentemente, Struik (1997) indicaba que en el siglo XVI el sistema decimal posicional no se extendía a los números fraccionarios, como sucedía en las tablas astronómicas.

Ha tomado un largo camino para que se incorpore los números fraccionarios como números propiamente dichos, en sus diferentes representaciones simbólicas y aludiendo a sus diferentes significados, partiendo de situaciones de la vida cotidiana tanto de reparto de cantidades como de medición. Es en estos últimos periodos que ejerce fuerza la consideración de las fracciones ayudando a dar más precisiones matemáticas, entre ellos está la consideración de la fórmula de π, muy cercano a 3,1416…, también se acerca el valor de *e* y se logra el invento del sistema métrico decimal coherente y muy adaptado al cálculo numérico.

# CAPÍTULO III

## FRACCIÓN, NÚMEROS FRACCIONARIOS Y NÚMEROS RACIONALES

En este apartado realizaremos una reflexión sobre el significado de los términos fracción, números fraccionarios y números racionales, aspectos que no son muy claros para los docentes o son tomados a la ligera como sinónimos. Haremos la descripción de cada uno de los objetos matemáticos mencionados, mientras que el análisis se hará siguiendo algunas de las reflexiones realizadas por la autora María José Ferreira Da Silva (2005) y se establecerá una clara diferencia entre cada uno de ellos así como la relación entre los mismos.

Así planteamos la pregunta: ¿qué es una fracción, un número fraccionario o un número racional? En función a la respuesta de los profesores, se define como números fraccionarios a aquellos de la forma a/b donde b ≠ 0, sin embargo muchos no aceptan como número fraccionario a los irracionales porque no se pueden convertir a fracción. Por ejemplo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ no sería una fracción, aunque indican que $\frac{1}{\sqrt{2}}$, al ser previamente racionalizado, se puede convertir en fracción, sin percatarse que se trata del mismo número en ambos casos.

Por otro lado, aceptan las «fracciones algebraicas» en R como representación de fracciones. Sin embargo, cuando reemplazan x por un número irracional este ya no es fracción. Esto refleja probablemente que en la escuela se denomina conjunto de los números racionales a todas las fracciones, sin distinguir las del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x+1}{x}$ ó $\frac{2+3i}{5}$ lo que incluye aplicar para estas últimas las mismas reglas operatorias.

Para aclarar las nociones de fracción, número fraccionario y número racional, utilizaremos las definiciones de algunos autores que son mencionados en la investigación por Ferreira Da Silva (2005) y Carrillo Yalán (2012).

Rouche (1998) denominó fracción a la representación simbólica: «un número encima y un número debajo», es decir a/b en contextos donde puede ser utilizado como nuevo número.

Según Caraca (1984) señala que los números enteros son racionales pero no son números fraccionarios al no tener la forma de numerador-denominador, aunque estos números se presenten en el estudio de los números racionales y sean escritos de la forma a/b. Esto se evidencia cuando se presenta la siguiente clasificación para los números reales:

$$\text{Números}\begin{cases}\text{Racionales}\begin{cases}\text{Enteros}\\ \text{Fraccionario}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$

*Figura 13.* Clasificación de los números reales.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

También Davis y Hersch (1985) determinan la fracción racional cuando definen a los números racionales señalando: «Cualquier número que sea la razón de dos enteros: 1/1, -6/7, 21/102».

Nunes y Bryant (1997) advierten la complejidad y diversidad de conceptos en que está inmersa la enseñanza de las fracciones y busca diferenciar los términos «fracciones» y «números racionales» señalando que se utilizará la expresión «números racionales» de una manera más general y «fracciones» sólo cuando se hace referencia a los problemas parte-todo.

D´Augustine (1976) define a los números fraccionarios como cociente de dos números naturales donde el divisor sea diferente de cero. Por tanto, a y b son números naturales y $b \neq 0$. De esta manera, una fracción puede ser definida como un símbolo o un nombre para designar un número fraccionario, es decir se centra en su representación y, además, dos fracciones pueden indicar un mismo número fraccionario, atendiendo a la cantidad que expresa.

Alphonse (1995) señala al número fraccionario como una representación de una clase de fracciones y, por tanto, la razón no es el número sino una relación entre dos números enteros, pero pueden estar representados en la fracción formulada.

Ciscar y García (1998) da la idea de fracción basada en situaciones en que muestran la relación parte-todo como también en situaciones en que está implícita una relación parte-parte o todo-todo que nos lleva a la interpretación de fracción como razón. Todavía existen otras interpretaciones de fracciones como operador y cociente de dos números. La construcción teórica que sintetiza todas estas interpretaciones constituye el número racional.

Hébert (1980) describe a la fracción como un símbolo, una representación de la forma a/b, donde a y b son números naturales, siendo b diferente de cero. Señala que toda fracción es igual a un conjunto infinito de otras fracciones, por ejemplo 1/2 = 2/4, 3/6… Es esta clase de fracciones que expresan una misma cantidad lo que se llama número racional y se basa en la clase de equivalencia. Se puede escoger cualquiera de estas fracciones para representarlo o para que lo defina y, por lo general, es la fracción que es irreductible. Así 1/2 es una fracción y puede ser considerado como representante del número racional definido por la clase de fracciones iguales: 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, -5/10, -3/6. Aún con los números enteros, se identifican como racional y sería representado por la clase 5/1, 10/2, 15/3, 20/4,…en este caso se identifica con el entero natural 5, o el número racional 5. El número racional definido por la clase 0/1, 0/2, 0/3,…se identifica con el número racional 0. De esta manera los números enteros forman así parte del conjunto de los números racionales.

Castro (1997) señala que cuando observamos un par de números ordenados de la forma $\frac{a}{b}$ o de la forma, $a/b$ , la denominamos fracción. En general, se define la fracción como

> … par ordenado de números enteros con la condición de que el segundo número sea distinto de cero. La expresión que se utiliza mayoritariamente para representar la fracción es forma $\frac{a}{b}$ (o $a/b$ ) donde b ≠ 0, y se denominan *a* numerador y *b* denominador de la fracción (p. 287).

Elguero (2008), mencionado en Carrillo (2012), señala como se describe, en algunos de los textos universitarios y con un lenguaje menos formal, la definición de los números racionales (Q):

Parten con el concepto de número desde la teoría de los números naturales (N) y sus operaciones. Luego se introduce el cero. La primera ampliación del concepto de número son los enteros negativos como respuesta a la necesidad de solucionar algunos casos de la sustracción en el sistema de los naturales. De esta manera emergen los números enteros (Z) los cuales gozan de las mismas leyes formales para la adición y la multiplicación en los números naturales. Sin embargo, Z plantea también restricciones para operar en la división (a÷b) entre dos números enteros que son primos entre sí, situación que se plantea en el marco algebraico al resolver una ecuación de la forma bx=a, con b distinto de cero cuya solución es a/b. Así, los números racionales son cocientes donde cada cociente se llama fracción. A su vez, cada fracción a/b se asocia a una familia de fracciones [a/b], donde todas las fracciones representan un mismo número. Si m/n es una fracción de la familia [a/b], m/n = a/b y se verifica que a.n = b.m.

> Por ello, la necesidad de ampliar el dominio numérico existente e incorporar nuevos símbolos para dar validez general a la propiedad existencial de la división. Los nuevos números emergen como cocientes de números enteros a y b utilizando el símbolo a/b, para notarlos, sujeto a la regla que b.(a/b)=a, es decir, a/b es por definición solución de la ecuación b.x=a. De esta manera, los números racionales son por definición cocientes. Cada uno de tales cocientes recibe el nombre de fracción (Carrillo, 2002, p. 18).

De esta manera, el autor señala que:

- Es posible asociar a cada fracción a/b una familia de fracciones [a/b], integrada por fracciones que representan al mismo número.
- Si m/n es una fracción de la familia [a/b] se cumple la igualdad a.n = b.m.

Rojo (2001), mencionado en Carrillo (2012), da una descripción del conjunto Q, como ha sido explicado anteriormente, con un lenguaje simbólico equivalente a dichas ideas. Se tiene que:

> Sea Z* = Z – {0}   y   Z x Z* = {(a;b) / a ϵ Z y b ϵ Z*}
> Se define en Z x Z* la relación R: (a;b) ~ (c;d) $\Leftrightarrow$ a.d = b.c
> Esta relación es una relación de equivalencia al verificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
> Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia, esta relación produce una partición en el conjunto Z x Z*.
> La clase de equivalencia de un elemento genérico (a,b) es:
> $K_{(a;b)}$={(x,y) ϵ Z x Z*/(x,y) ~ (a;b)} donde (x,y) ~ (a;b) $\Rightarrow$ b.x = a.y
> En la partición de Z x Z* el conjunto de índices está dado por la totalidad de pares (a;b) de elementos coprimos, tales que p ϵ Z y q ϵ Z*.
> Se define: Número racional es toda clase de equivalencia determinada por la relación de equivalencia definida en Z x Z*.
> Conjunto de los números racionales es el cociente de Z x Z* por la relación de equivalencia:
> Conjunto de los números racionales es el cociente de Z x Z* por la relación de equivalencia: $Q = \frac{ZxZ^*}{\sim}$
> Además, el símbolo a/b denota un número racional, es decir una clase de equivalencia K(a,b) de acuerdo con la definición del conjunto de índices (Carrillo, 2002, p. 19).

Todas estas definiciones de fracción nos hacen comprender el sentido que tiene como número, quebrado, fraccionado o hasta roto como lo señalan algunos autores. Por otro lado, el proceso de legitimación de estos números ha tomado su tiempo en la historia, lo que se explica por la inherente tendencia del hombre hacia lo concreto, lo perceptual, lo cual es representado por los números naturales; para introducirse a la noción de número fraccionario se requirió de un ámbito de lo abstracto que lleva cierta complejidad de comprensión.

Ferreira Da Silva (2005), toma la siguiente postura en cuanto a las definiciones de fracción, número fraccionario y número racional. Considera:

- Fracción como una representación, un símbolo, es decir, una expresión que se escribe con numerador y denominador.
- Número racional es todo aquello que puede ser escrito en forma fraccionaria con numerador y denominador entero, y también puede ser escrito en otra representación, es decir, en forma decimal.
- Número fraccionario es todo aquello que puede ser representado en forma de fracción aun cuando este esté conformado por números irracionales o complejos.

En esta investigación, la fracción será la representación simbólica de una cantidad, constituido por el arreglo de dos números donde uno es numerador y el otro es denominador. En este caso se tiene como fracción, por ejemplo, un pedazo de papel de una hoja dividida en 4 pedazos iguales, esto es ¼, como también si se reparten dos pizas entre 5 amigos, cada uno come 2/5 de pizza. Estas situaciones se abordan generalmente desde la primaria, por lo que, al estar esta investigación enfocada en estudiantes de nivel superior para ser docentes de primaria, se enfatizará las fracciones a/b definidos como: $\frac{a}{b}, \, donde \; a \in N, b \in N^{*}$.

# CAPÍTULO IV

## MARCO TEÓRICO

### 4.1. Teoría de los Campos Conceptuales

Una de las teorías que dan soporte a la educación, centrándose en analizar la manera cómo se adquieren los contenidos matemáticos, es la que tiene como objetivo desarrollar la teoría sobre la construcción de los campos conceptuales. Vergnaud (1990) señala que se describe la teoría de campos conceptuales como una posible referencia para la enseñanza de las ciencias y para la investigación en esta área, en especial en la Matemática. Esta teoría permite analizar la construcción de conceptos por parte del estudiante relacionando otros conceptos involucrados, sus sistemas y sus rupturas que se dan en un largo proceso de adquisición. Por ello, con esta teoría se podrá relacionar la construcción del concepto de fracción a partir de las estructuras multiplicativas y las diversas situaciones que dan sentido a los conceptos de fracción.

Al ser el concepto de fracción uno de los conocimientos que se van adquiriendo a lo largo de la escolaridad desde la primaria, es importante que este adquiera sentido para el estudiante basado en las situaciones problemáticas que se le presenten de manera cercana y no llevándolo solo a una breve definición de fracción o fórmula de representación. Desarrollando el concepto de fracción de manera significativa, este permitirá alcanzar un conocimiento racional que conlleve a actividades operatorias tanto en situaciones de aplicaciones inmediatas como en aquellas que exijan mayor reflexión, exploración del estudiante al enfrentarlas para resolverlas con diversos recursos cognitivos, con lo que alcanzará mayores niveles de generalización y abstracción. Al respecto, Vergnaud señala que «el dominio de las fracciones hace parte de un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones que están en estrecha conexión» (Hincapié 2011, p.12).

Gerard Vergnaud (1990), sostiene en la teoría de campos conceptuales que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio se va adquiriendo a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Afirma que

> … la teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas (p. 133).

La teoría de campos conceptuales enfatiza que el centro del desarrollo cognitivo es la conceptualización. De esta manera, considera la conceptualización como la base de la cognición, por lo que pone atención al análisis de los aspectos conceptuales tanto de los esquemas como de las situaciones en donde se desarrollan los esquemas, que pueden darse en la escuela o fuera de ella. Son estas las características que hacen relevante a esta teoría para ser tomada como base en la presente investigación, por ahondar en la adquisición del concepto de fracción a partir de sus significados los cuales se originan en función a las situaciones planteadas.

Vergnaund (1990) sostiene que los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de campo conceptual, los conceptos de esquema (la gran herencia piagetiana de Vergnaud), situación, invariante operatorio (teorema-en-acción o concepto-en-acción) y su propia concepción de concepto. En el proceso de aprendizaje se integran estos conceptos claves (campos conceptuales, esquemas y situaciones) que definiremos a continuación.

### 4.1.1. Campo Conceptual

Para Vergnaud (1990) el campo conceptual es como un conjunto de problemas o situaciones que, para abordarlos, requiere el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de formas distintas pero que se relacionan entre sí. Vergnaud define el campo conceptual «como un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición». (Moreira 2002, p. 2)

Se entiende como campo conceptual, un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere del dominio de varios conceptos de naturaleza distinta, de distintos procedimientos y de distintos tipos de representaciones que se conectan entre sí. De esta manera, el campo conceptual es considerado como una unidad de estudio para dar sentido a los problemas de adquisición y a las observaciones hechas en relación a la conceptualización. Por ello, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, la segunda sería la de los conceptos y los teoremas.

Así, el análisis de las estructuras multiplicativas tiene características particulares en función a la situación que se presente, sea de repetir una cantidad o repartir en partes iguales conociendo alguna de las condiciones, lo cual genera situaciones multiplicación o división a partir de una proporción simple de dos variables, una en relación de la otra.

Vergnaud señala que el campo conceptual en esta estructura multiplicativa es determinada por la situación, que puede ser:

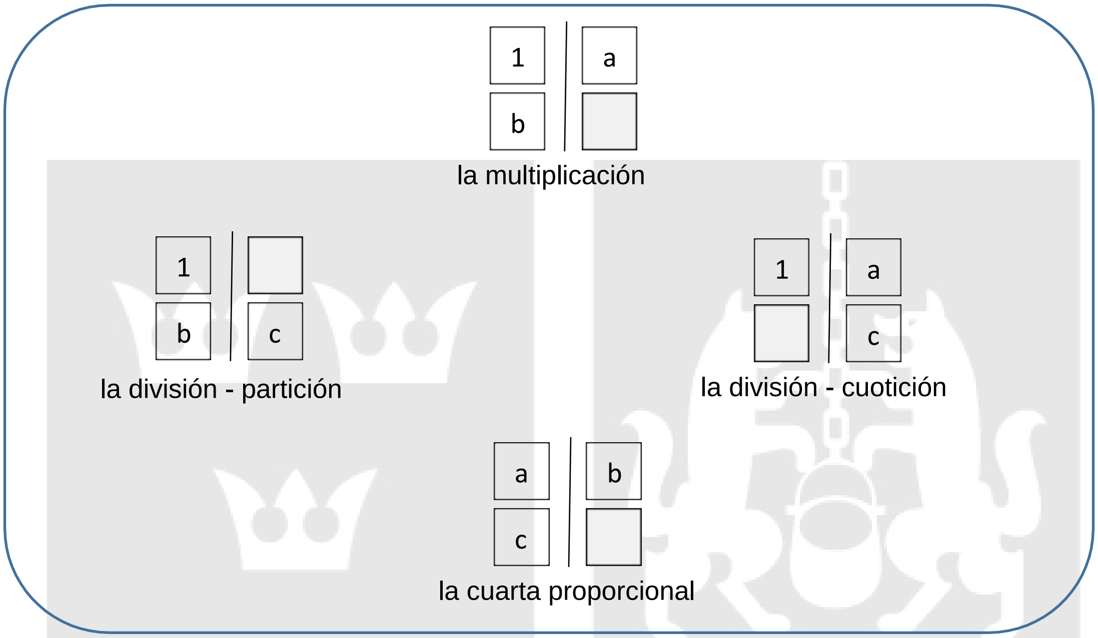
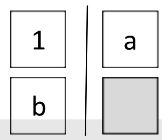



*Figura 14.* Ejemplo de estructura multiplicativa.
Fuente: Vergnaud (1990).

Como se observa, la multiplicación es designada como una operación cuaternaria, es decir, conformada por cuatro elementos, uno de los cuales es desconocido. Es así como se concibe entre los significados más elementales de la multiplicación el de proporcionalidad simple, aunque, según la especificidad de la tarea y la relación de los elementos o lo que se busca encontrar, puede generar situaciones de diferente complejidad. Veamos un ejemplo que aclare el cuadro presentado.

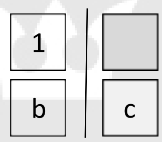
Partimos de la afirmación de que en una fábrica de jabones se colocan:

En una caja… 6 jabones



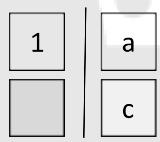
La multiplicación

Si una caja trae 6 jabones, ¿cuántos jabones tendré con 5 cajas?



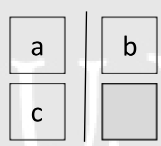
División - partición

Si 4 cajas traen 24 jabones, ¿cuántos jabones traerá una caja?



División - cuotición

Si 1 caja trae 4 jabones, ¿cuántas cajas se necesitarán para colocar 24 jabones?



De cuarta proporcional

Si 4 cajas traen 24 jabones, ¿cuántos jabones traerán 7 cajas?

Como señala Vergnaud, la complejidad de una a otra situación varía dependiendo de la tarea en sí, es decir, de lo que tenga que hacer en dicha situación. Por ejemplo en una situación donde se compra chocolates a S/ 4 cada chocolate, no resulta de igual complejidad si la tarea es cuánto debo pagar por 5 chocolates a que si la tarea fuese con 30 soles cuantos chocolates como máximo puedo comprar. Si bien ambas son situaciones de proporcionalidad simple, la primera tarea se centra en la noción básica multiplicativa mientras que la segunda responde al modelo de división-cuotición que requiere un nivel mayor de organización de la información y relación entre los elementos. Influyen también elementos como los valores numéricos según el conjunto de trabajo, el rango numérico, el dominio de experiencia en el manejo del concepto y del modelo matemático.

### 4.1.2. Concepto

El centro de la teoría de los campos conceptuales es la conceptualización. Esto hace que si el interés está en la enseñanza y el aprendizaje, un concepto no puede quedarse solo en una definición. Es necesario considerar también el cómo ese concepto toma sentido para el niño, es decir, a tomar en cuenta las situaciones que debe resolver el niño para que alcance una real comprensión del concepto. La función adaptativa del conocimiento lleva a poner atención a las formas que este toma en la acción del sujeto, por ende, se afirma que el conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento.

Vergnaud (1990) define el concepto como un conjunto de tres elementos. Las situaciones que dan sentido al concepto, los invariantes sobre los que reposa la operacionalidad del concepto y las representaciones simbólicas que pueden ser usadas para indicar esos invariantes.

Al atender a las situaciones que puede afrontar un estudiante, Vergnaud (1990) distingue dos tipos de situaciones. Las primeras son aquellas para las cuales el sujeto dispone en su repertorio, en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de una situación. Las segundas son aquellas para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, obligándole a un tiempo de reflexión y exploración que lo conduce al éxito o al fracaso.

Se precisa que en el primer tipo de situaciones, las conductas del sujeto se caracterizan por ser automatizadas y estarán organizadas por un único esquema. En el segundo caso, el sujeto se ve obligado a realizar intentos, explorar, reflexionar, etc., lo cual lo llevará a esbozar varios esquemas que deberán ser movilizados como acomodados, separados y recombinados, proceso que lleva a descubrimientos y a buscar diferentes formas de solución tanto en conceptos como en representaciones.

Para Vergnaud (Moreira, 2002, p. 12) la idea de concepto es central y lo considera constituido por tres conjuntos que son i) las situaciones que dan sentido al concepto (referente), ii) los conceptos y teoremas-en-acción que es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre los cuales actúa la operacionalidad de los conceptos (significado), y iii) las representaciones simbólicas (lenguaje, gráficos, sentencias formales, diagramas, etc.) que son utilizadas para representar los conceptos, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (significante).

Eso implica que para estudiar el desarrollo y el uso de un concepto, a lo largo del aprendizaje o de su utilización, es necesario considerar esos tres conjuntos simultáneamente. Claro está que, si los conceptos se tornan significativos a través de las situaciones, entonces son las situaciones y no los conceptos los que constituyen la principal entrada en un campo conceptual. Esta relación de los tres elementos que generan los conceptos se aprecia en la figura 14.


*Figura 15*. Elementos sobre los que se desarrolla el concepto.

Es importante destacar que se entiende por situación a una tarea compleja (combinación de subtareas) cuya dificultad depende de la conceptualización para abordarla y no de la cantidad de subtareas; por otra parte, cada situación pone en acción algunas propiedades de los conceptos y de los teoremas asociados, dándole sentido a estos. Dentro de cada campo conceptual, las situaciones se pueden agrupar en clases, en función de las propiedades de los conceptos que se requieren para su solución.

### 4.1.3. Situaciones

Las situaciones son elementos cruciales en la teoría de campos conceptuales. Como se indicó previamente, son las situaciones las que constituyen la principal entrada en un campo conceptual, ya que los conceptos toman sentido y se tornan significativos para la persona solo a partir de la interacción a través de las situaciones. En efecto, las situaciones tienen una importancia especial en esta teoría ya que brinda un alcance didáctico, es decir, contribuye en el proceso de enseñanza y aprendizaje, como también brinda una significación en la cual la dimensión afectiva interviene tanto como la dimensión cognitiva.

Vergnaud (1990) emplea el concepto de situación no relacionado al de situación didáctica como el que le diera Brousseau, pero sí al de tarea. Así, una situación es una tarea compleja que puede ser analizada como una combinación de subtareas cuya dificultad depende de la conceptualización para abordarla y no de la cantidad de subtareas; en donde es necesario conocer sus naturalezas y dificultades propias.

Por otro lado, cada situación pone en acción algunas propiedades de los conceptos y de los teoremas asociados, dándole sentido a los conceptos y siendo estos significativos para el estudiante. Dentro de cada campo conceptual, las situaciones se pueden agrupar en clases, en función de las propiedades de los conceptos que se requieren para su solución. (Andrés, M. Pesa, M. Moreira, M; 2006).

Además, se destacan dos ideas importantes con relación al sentido de situación, la de variedad y la de historia. La primera afirma que existe una gran variedad de situaciones en un campo conceptual dado y las variables de situación son un medio de generar de manera sistemática el conjunto de las clases posibles. La segunda, la de historia, sostiene que los conocimientos de los alumnos son moldeados por las situaciones que encuentran y que progresivamente dominan, que, por lo general, son las primeras situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que queremos que aprendan. Cierto es que muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar o de nuestra experiencia al intentar modificarlas.

Si bien las situaciones son las que dan sentido al concepto y el concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones, cabe resaltar que el sentido no está en las situaciones en sí mismas sino que el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes, que son las representaciones simbólicas (Moreira, 2002).

#### 4.1.4. Esquemas

Al referirnos a los conceptos, se mencionó que hay dos tipos de situaciones que enfrenta el estudiante y que varían dependiendo de si dispone de las competencias necesarias para resolverlas. En cada una de ellas se observa que el concepto de «esquema» funciona de forma distinta. En el primero se observa para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único; sin embargo, en el segundo caso, se observa el intento de varios esquemas, que pueden entrar en discusión y que requieren de reflexión, exploración, para llegar a la solución buscada, de modo que dichos esquemas requieren ser acomodados, separados y recombinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

De esta manera, Vergnaud (1990) define «esquema» a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. Es en los esquemas que se deben investigar los conocimientos en acción del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que hacen que la acción del sujeto sea operatoria. El esquema da cuenta de la forma de organización de los conceptos, como de las habilidades sensorio-motoras y de las habilidades intelectuales. Un esquema genera acciones y estas dependen de las condiciones y características de la situación, donde se puede esperar que no sean respuestas con un mismo procedimiento sino una variedad de esquemas observados en su secuencia de acciones. Estos esquemas se presentan en todos los dominios, incluido el de las competencias matemáticas, aunque no son exclusivos de ellas.

Un esquema es una organización amplia que se ajusta para todo un conjunto de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción, dependiendo de las características de cada situación particular. No es el comportamiento el que es invariante, pero sí la organización del comportamiento. Hay esquemas perceptivo-gestuales como el que realiza un niño en el proceso de contar objetos o de hacer un gráfico o un diagrama; también hay esquemas verbales como el de hacer un discurso y esquemas sociales como el de seducir a otra persona o el de dirigir un conflicto.

Se tienen los algoritmos como ejemplo de esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos. Cuando estos se utilizan repetidamente para tratar las mismas situaciones, se transforman en esquemas ordinarios. De allí que algunos de los esquemas que poseemos pueden ser ineficaces. Cuando un esquema ineficaz es utilizado en una situación, se llega a la necesidad de sustituirlo o modificarlo. Por lo tanto, «la educación, debe contribuir a que el sujeto desarrolle un repertorio amplio y diversificado de esquemas procurando evitar que esos esquemas se conviertan en estereotipos esclerotizados» (Moreira, 2012).

En general, Vergnaud (Moreira, 2002) señala que los esquemas tienen variados ingredientes como:

- Metas y anticipaciones: el esquema se dirige a una clase de situaciones en las que el sujeto descubre una posible finalidad de su actividad. Estas deben discutirse en el aula de clase y puestas en evidencia.
- Reglas de acción del tipo «si…, entonces…»: a partir de ella permite generar reglas de búsqueda de información y de control de resultados de acción.
- Invariantes operatorios: son los conceptos en acción que dirige el reconocimiento de los elementos pertinentes de la situación, relevantes para la identificación y selección de la información, y los teoremas en acción que son los conocimientos contenidos en los esquemas permitiéndole al individuo la producción de inferencias y la selección de reglas de acción para dominar la situación.
- Posibilidad de inferencia: son los razonamientos que permiten evaluar, aquí y ahora, las reglas y anticipaciones a partir de los invariantes operatorios que dispone el sujeto. (p. 7-8)

Presentaremos un ejemplo que permita explicar los aspectos mencionados de los esquemas. Se tomará el esquema de enumeración de una pequeña cantidad de objetos discretos realizada por niños pequeños de cinco años. Cual fuere los objetos que cuente ya sea canicas, sillas, galletas, etc., se da de todas maneras una organización del invariante para el funcionamiento del esquema. En este caso es el de la correspondencia biunívoca que se realiza con los ojos o gestos o señalando con las manos cada objeto y el número-palabra que identifica el último elemento de la serie como el cardinal del conjunto enumerado. En este caso, se recurre a actividades perceptivo-motoras, a significantes y a construcciones conceptuales que vienen a ser los conocimientos puestos en acción. Entre ellos nos referimos a la serie numérica, el cardinal de un conjunto, el ordinal, la correspondencia biunívoca, entre otros. Como señala Moreira, todos estos conceptos se dan de forma implícita, no evidente, pero si faltara uno de ellos, genera errores en las situaciones a resolver. De esta manera, el esquema es la forma estructural de la actividad que implica la organización del invariante del sujeto sobre una clase de situaciones dadas y contiene conocimientos en acción que son implícitos.

En la práctica, se sabe que en una situación nueva para el estudiante, muchos esquemas pueden ser evocados sucesivamente y simultáneamente. De esta manera, el concepto de esquema establece el vínculo entre la conducta y la representación. De igual forma, la relación entre situaciones y esquemas es la base fundamental para la representación, por lo tanto lo es también para la conceptualización (Moreira, 2002).

Un esquema es una organización amplia que se ajusta para todo un conjunto de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción, dependiendo de las características de cada situación particular. No es el comportamiento que es invariante, pero sí la organización del comportamiento. Hay esquemas perceptivo-gestuales como el que se realiza un niño en el proceso de contar objetos, o de hacer un gráfico o un diagrama, también hay esquemas verbales como el de hacer un discurso y esquemas sociales como el de seducir a otra persona o el de dirigir un conflicto. Se tienen los algoritmos como ejemplo de esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos. Cuando estos se utilizan repetidamente para tratar las mismas situaciones, se transforman.

### 4.1.5. Invariante Operatorio

Sabemos que un esquema organiza la manera cómo afrontar un conjunto de situaciones, tomando los conceptos, las propiedades y sus respectivas representaciones. En efecto, estos conceptos y propiedades son los conocimientos contenidos en los esquemas y comprenden las expresiones "concepto-en-acción" y "teorema-en-acción" y que Vergnaud los denomina de manera más amplia por la expresión "invariantes operatorios".

Vergnaud precisa en Moreira (2002) que teorema-en-acción es una proposición sobre lo real considerada como verdadera, y concepto-en-acción es un objeto, un predicado, o una categoría de pensamiento considerada como pertinente, relevante en una determinada situación.

Establece tres tipos lógicos de invariantes operatorios:

1. Del tipo *proposiciones*: en esto se refiere a que pueden ser verdaderos o falsos, como es en los teoremas-en-acción.
2. Del tipo *función proposicional*: estos son los que permiten la construcción de proposiciones. En este tipo tenemos los conceptos de cardinal, transformación, etc. Son los conceptos-en-acto o las categorías-en-acto, que por lo general no son explicitados por los estudiantes.
3. Del tipo *argumento*: en Matemática, los argumentos pueden ser objetos materiales, personajes, números, relaciones e incluso proposiciones.

Por tanto, se considera un concepto como un conjunto de invariantes que se utilizan en la acción. Cabe señalar que un concepto-en-acción no es un verdadero concepto científico, como tampoco un teorema-en-acción es un verdadero teorema hasta que estos se tornen explícitos y se pueda discutir su pertinencia ysu veracidad.

A manera de resumen de los aportes de Vergnaud (1990) acerca de los campos conceptuales, se debe tener presentes tres aspectos fundamentales para la conceptualización de un concepto:

1. Las situaciones que son las que le dan sentido.
2. El conjunto de invariantes (objetos, propiedades, teoremas, relaciones, etc.) que se ponen en juego para resolver las situaciones.
3. Las diferentes representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos, sentencias formales, etc.) que son las que se usan para representar los invariantes, situaciones y procedimientos.

**4.2. Fracción y sus Significados**

En reiteradas oportunidades se observa, desde la experiencia escolar, que se enseña y se aprende la fracción solo a partir de la representación, es decir, de cómo se escribe, cómo se grafica, cómo se lee, cuáles son sus elementos, etc. Así, en algunas circunstancias de clase, la actividad central promovida por el maestro se basa en ver la fracción como un arreglo de números puesto uno sobre otro y dándoles los nombres correspondientes a estos elementos como numerador y denominador. Luego, el trabajo de aula se enfoca en representar gráficamente una fracción a manera de regla, según el comportamiento de cada elemento. Es así como se indica que en una fracción como $\frac{2}{3}$, el número de abajo indica el total de partes iguales que se ha dividido la unidad y el de arriba la cantidad de partes que pintamos.

Según lo antes descrito, el aprendizaje solo centra la atención en cómo se representa una fracción y de una manera única y también está lejos de ser aplicado en un contexto y con sus diferentes significados. En la medida que los estudiantes comprendan con mayor amplitud y diferentes sentidos la noción de fracción, podrán usarlos en variedad de situaciones cotidianas.

Actualmente, hay muchas investigaciones que enfatizan la importancia de comenzar a usar las fracciones por el sentido común, usar el significado en el contexto y no por repetir una regla o un trazo. En esta parte se presentarán los diferentes significados de fracción que brindarán saberes matemáticos muy importantes con la finalidad de apoyar a la reflexión sobre la enseñanza de las fracciones y contribuir de esta manera al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes.

Tomaremos como referencia para los significados de fracción los presentados en Perera y Valdemoro (2007) que mencionan los significados de Thomas Kieren, quien ha realizado diversos estudios acerca de la construcción de estos números. Kieren reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón) en los que subyace el conocimiento de la fracción. Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro citados anteriormente (Kieren, 1983). Considerando la importancia de estos constructos intuitivos en nuestra investigación, se hace necesario describir la naturaleza básica de cada uno de ellos como se muestra en la figura 16.

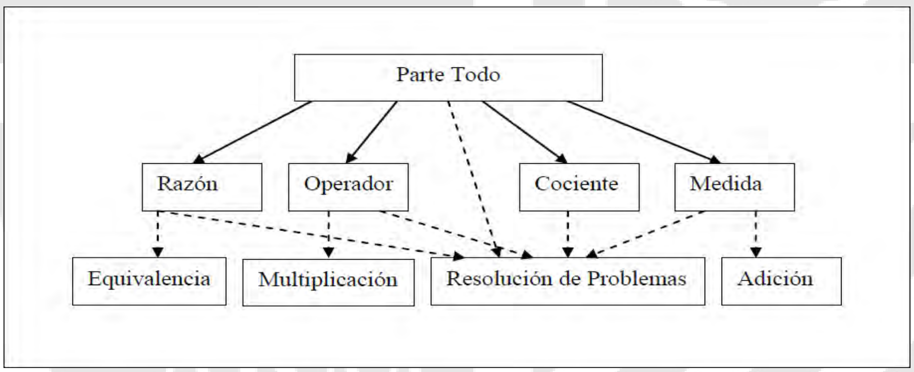



*Figura 16.* Modelo teórico de las interpretaciones del concepto de fracción.
Fuente: Matute (2010).

### 4.2.1. Fracción como parte-todo

Usualmente observamos en los textos escolares que inician la presentación de la fracción asociada a una situación concreta, como una torta dividida en cuatro partes iguales. Luego señalan que el todo es la torta, que al dividirse en cuatro partes iguales cada parte se llama un cuarto y se escribe ¼. Si se toman varias partes de la torta, por ejemplo tres, estaríamos hablando de ¾. Muchos investigadores coinciden que esta «definición» de fracción como parte-todo, si bien es muy clara para entenderse, no tiene el soporte suficiente para sostener las siguientes nociones según la necesidad de las situaciones que se enfrenten.

Cabe resaltar que entender una fracción en su relación parte-todo es muy distinto si ese todo («la unidad») está conformado por algo continuo como un terreno, una torta o un rectángulo, que por algo discreto como un conjunto de objetos o personas. De esta manera, presentaremos este significado parte-todo de manera separada, primero en el caso continuo y luego para los casos discretos.

### 4.2.1.1 Fracción como parte-todo en cantidades continuas

La fracción como parte-todo en cantidades continuas considera un todo dividido en partes iguales y señala como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes iguales. Para los casos donde el «todo» es una unidad continua, por ejemplo un rectángulo, una torta, una vara de madera, una caja, etc., hallar una fracción es aparentemente sencillo ya que, por lo general, se puede hacer apoyado por un soporte gráfico, como:

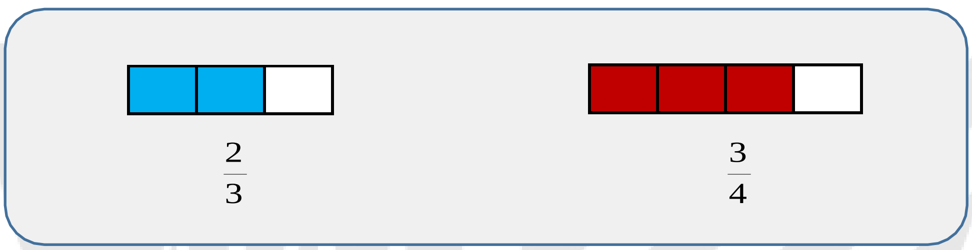



*Figura 17.* Representación gráfica del concepto parte-todo (continuo).

Por lo general, se usan dos tipos de representaciones: la simbólica que es de escritura $\frac{a}{b}$, asociada con la representación gráfica que es la figura de esa región dividida en partes iguales. También se utiliza la expresión verbal que corresponde a la parte sombreada del todo y es con la que inicia el uso cotidiano.

A continuación se presenta un esquema que muestra este concepto de fracción parte-todo continuo.

**Fracción parte-todo continuo***

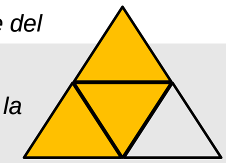
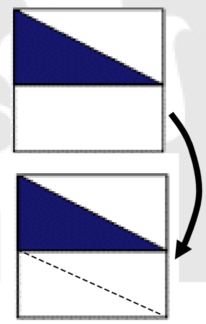
<table>
<tr><th>Representación gráfica</th><th>Expresión verbal</th><th>Representación simbólica</th></tr>
<tr><td>¿Qué parte del triángulo representa la región sombreada? </td><td>La región sombreada representa las tres cuartas partes del triángulo total.</td><td>La región sombreada representa los $\frac{3}{4}$ del triángulo total.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplo<br>¿Qué parte del cuadrado representa la región sombreada?<br>Aplicando el concepto de fracción, de una unidad divida en partes iguales, se toma la parte sombreada como base para dividir el cuadrado completo en partes iguales. Así se obtienen cuatro partes iguales, siendo solo una la región sombreada. <br>Respuesta: La región sombreada representa $\frac{1}{4}$ del cuadrado.</td></tr>
</table>

*Figura 18.* Representaciones del concepto parte-todo (continuo). Adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC-Minedu.

En estos casos, es necesario presentar situaciones y representaciones que dejen claro este significado de fracción como parte-todo en su forma continua ya que, por lo general, es con este significado que se presenta una de las primeras tareas que se realizan en la enseñanza de las fracciones y a la vez es la noción que está presente en los otros significados. Así, se recomienda proponer situaciones donde los estudiantes tengan que representar, por ejemplo, $\frac{3}{5}$ de un una hoja de papel y evitar pedir que representen los $\frac{247}{400}$ de un terreno rectangular por no ser el soporte gráfico una ayuda para la comprensión.

Como sostiene Vergnaud (1990), un concepto no puede ser reducido a su definición, es decir, no puede quedar en el enunciado de una fracción como «una parte de un todo que ha sido dividido en partes iguales». Sostiene que se requiere de situaciones y problemas para que este concepto tenga sentido para el niño. De ahí que es necesario plantear situaciones que permitan contemplar la función adaptativa del conocimiento y las formas que va tomando en las acciones que realiza el sujeto. Señala pues que «el conocimiento racional es operatorio o no es tal conocimiento» (Vergnaud, 1990).

Ferreira Da Silva (2005) muestra una serie de tareas asociadas al significado parte-todo continuo las cuales pueden ser resueltas a partir de diversas técnicas o estrategias. En ellas se puede evidenciar la gradualidad de las tareas y las diferentes acciones que realiza el sujeto movilizando y adaptando su conocimiento de fracción según la complejidad de las situaciones.

Tipo de tarea: Identificar la fracción que corresponde a la figura presentada.

Tarea 1: ¿Qué parte de la figura está pintada?

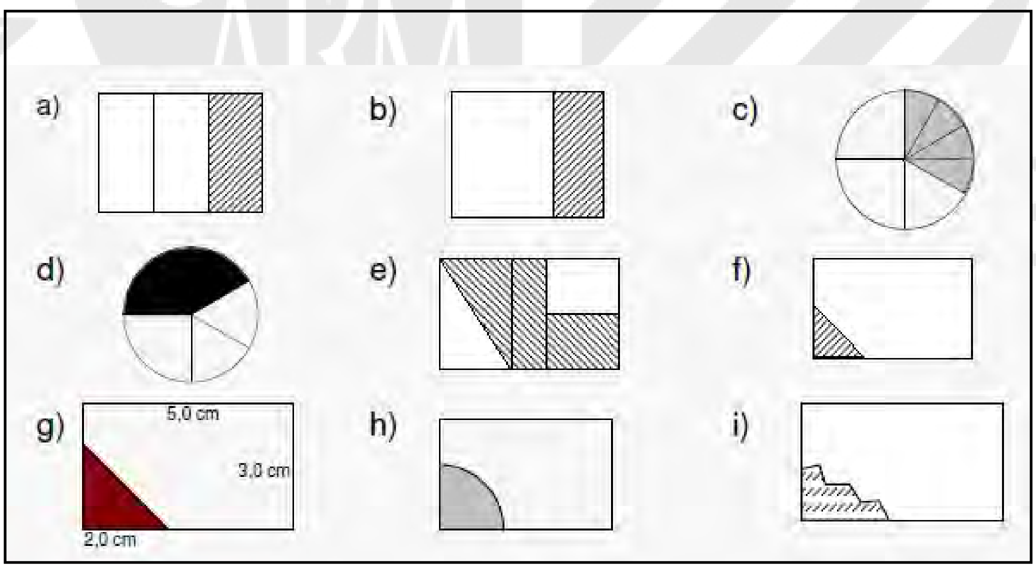
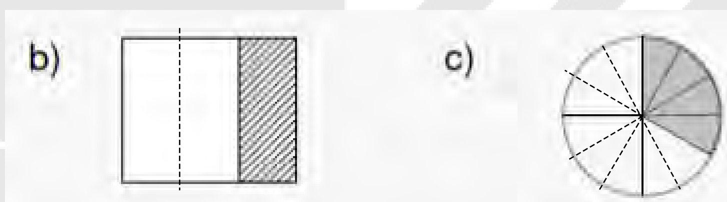



*Figura 19.* Representación gráfica del concepto parte-todo (continuo)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Para resolver estas situaciones el estudiante debe observar la parte sombreada de cada figura dada, considerada como todo. Es relevante señalar cómo interviene el concepto de fracción como parte-todo al abordar cada una de estas tareas. Se puede observar que algunas tareas pueden responder a conductas automatizadas, como el caso de la tarea a) donde se aplica de forma directa el concepto de fracción parte-todo continuo. Se cuenta las partes en que se dividió la unidad y luego se cuentan las partes que han sido sombreadas, dando como respuesta ⅓.

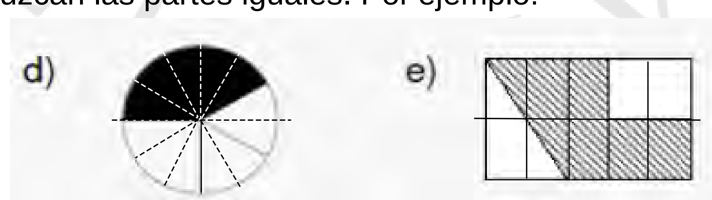
Las siguientes tareas exigen al sujeto realizar intentos, explorar con la figura, realizar movimientos que lo llevan a esbozar diferentes esquemas conduciendo a buscar diferentes formas de solución tanto en conceptos como en representaciones. Así, las tareas b) y c) exigen establecer relaciones entre las partes sombreadas con la figura completa considerada unidad, para ello se realizan otros trazos con el fin de determinar las «partes iguales» de la división de la figura como también establecer otras relaciones entre ellos. Por ejemplo:




$\frac{1}{3}$ $\frac{4}{12}$

*Figura 20.* Respuesta de Figura 19.

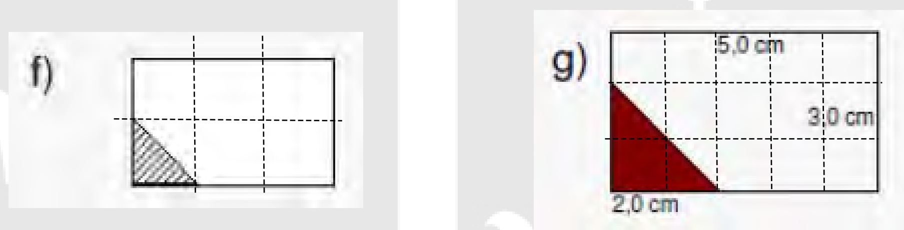
En algunos casos, como en las tareas e) y f), es necesario combinar el concepto de dividir el todo en partes iguales y a la vez, establecer relaciones entre las partes mismas y llegar a identificar equivalencias entre ellas, así como generar subdivisiones para que se produzcan las partes iguales. Por ejemplo:




$\frac{5}{12}$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

*Figura 21.* Respuesta de Figura 19.

En algunos casos, como en las tareas f) y g) es necesario establecer relaciones entre la parte sombreada y el todo pero basado en la técnica que consiste en la reconstrucción de figuras presentadas con base de la parte pintada. En estas se obtiene en f) 1/12 y en g) 2/15.




$\frac{1}{12}$ $\frac{2}{15}$

*Figura 22.* Respuesta de Figura 19.

En las tareas h) e i) podemos notar también que el empleo de las técnicas anteriores no es suficiente, no es posible dividir en partes iguales y establecer relaciones entre ellos. De ahí que se hace necesario el utilizar la aproximación o estimación de las regiones, tomando una unidad de medida de área y de esta manera determinar la fracción aproximada. Estas tareas confirman la necesidad de tener otros conceptos de fracción y no quedarse solo en el de parte-todo.

Cabe resaltar que hay tareas que requieren del estudiante analizar la unidad considerada como todo y probar formas de cómo representar la fracción que se pide. Estas tareas son poco usuales en la enseñanza y esta movilización del todo (continuo) hace variar la complejidad de la tarea.

Entre las tareas propuestas por Silva, están las que movilizan el concepto de fracción como parte-todo a partir de sus diversas representaciones que tome la unidad. Observamos tareas donde se pide representar una fracción dada la representación de la unidad.

Tipo de tarea: Identificar un número fraccionario en una figura dada.

Tarea 2: Pinta la mitad de la figura. 

Tarea 3: Pinta un tercio de la figura. 

*Figura 23.* Representación gráfica del concepto parte-todo (continuo)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

En estas tareas es necesario tener el concepto de fracción bien definido. No basta con decir dos partes ni tampoco indicar dos partes iguales, sino llegar a comprender que son dos partes con regiones iguales. Así se puede dar muchas soluciones a cada caso, por ejemplo:

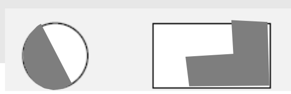
$\frac{1}{2}$  $\frac{1}{3}$ 

*Figura 24.* Respuesta de Figura 23.

Otra de las tareas que precisa Silva es la de reconstrucción del entero, es decir, de la unidad en general cuando lo que se conoce es una parte. En tareas como estas se evidencia el concepto de fracción evocada de manera inversa, es decir comenzar de la parte y construir el todo.

Tipo de tarea: Reconstruir el entero.

Tarea: Si la figura dada es un tercio del total, dibujar la figura total.

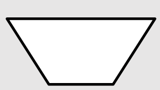


*Figura 25.* Representación gráfica del concepto parte-todo (continuo)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

En este caso, la solución se puede dar de diversas maneras en cuanto a su representación. El concepto aplicado es que una región como la mostrada es ⅓, por lo tanto esto es una de las tres partes iguales en las que ha sido dividida la unidad. Su representación puede ser:

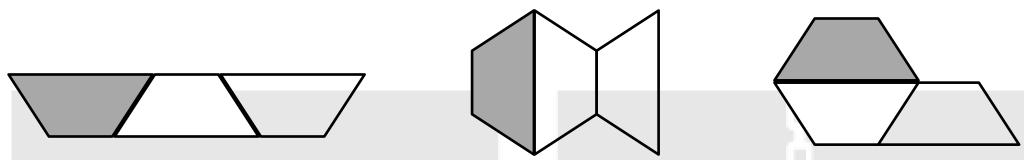


*Figura 26.* Respuesta de Figura 25.

Se sabe que no puede ser este el único significado de fracción que conozca el estudiante en toda su escolaridad, dada las dificultades que a su vez esta noción pueden presentar. Por ejemplo, enfatizando la idea del todo, cuando piden representar una fracción impropia como $\frac{7}{3}$, en el caso de que el todo sea una torta, no se puede pensar coger 7 pedazos de una torta que ha sido dividida en 3 partes. En este caso comienza a perder su significado intuitivo y genera confusión en el estudiante.

Se observa que hay tareas que implican situaciones que provocan conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único como también hay otras en las que se va a manifestar el esbozo sucesivo de varios esquemas que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y recombinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos (Vergnaud, 1990).

#### 4.2.1.2. Concepto de fracción como parte-todo en cantidades discretas

La fracción parte-todo en cantidades discretas considera una unidad compuesta por elementos separados, es decir, un conjunto o colección de objetos como «todo» que será dividido en subgrupos de igual cantidad de objetos en cada uno. Para estos casos donde el «todo» es una unidad discreta, por ejemplo personas, juguetes, sillas, botellas, etc., se puede hablar de fracción y su significado sería, por ejemplo: «los $\frac{3}{4}$ de este grupo de pelotas son negras», y su representación sería así:

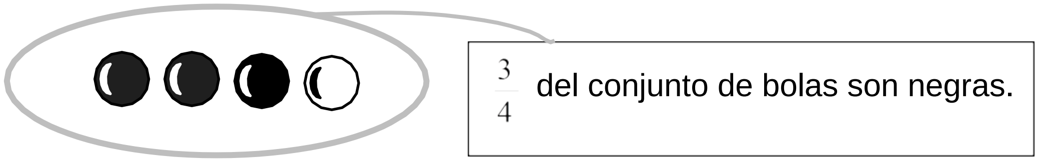
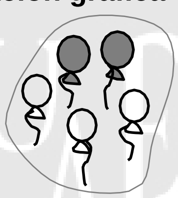



*Figura 27***.** Representación gráfica parte-todo (discreto).

En estos casos, es necesario presentar situaciones y representaciones que dejen claro este significado de fracción como parte-todo en su forma discreta. En muchas situaciones de clase se posterga su presentación en la primaria y en ocasiones no llega a trabajarse hasta la secundaria. Es necesario comprender lo claro de la representación discreta y a la vez conocer de las dificultades implícitas en su manejo. A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción parte-todo discreto.

**Concepto de fracción parte-todo discreto***

| **Representación gráfica** | **Expresión verbal** | **Representación simbólica** |
|---|---|---|
| *¿Qué parte del total de globos son negros?*  | *Los globos negros representan los dos quintos del total.* | *Los $\frac{2}{5}$ del total de globos son negros.* |

**Ejemplo**

**¿Qué parte del total de galletas tiene forma de estrella?**

*Respuesta: Los $\frac{5}{8}$ del total de galletas tienen forma de estrella.*

*Figura 28.* Representaciones del concepto parte-todo (discreto).
Adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC-Minedu.

En la teoría de los campos conceptuales se enfatiza la conceptualización, la misma que se define por situaciones que son los referentes del concepto y, en este caso, es el conjunto de objetos discretos con el que se formarán grupos de igual cantidad de objetos al referirse a la fracción. También están los teoremas y los conceptos-en-acción que nos brindan el significado del concepto y es la noción fracción como parte de un conjunto. Finalmente, intervienen las representaciones simbólicas que corresponde a los significantes puestos en juego.

Es así como Ferreira Da Silva presenta en este significado de fracción la tarea 3.

Tarea 3: ¿Qué fracción de la cantidad de figuras corresponde a los cuadrados?

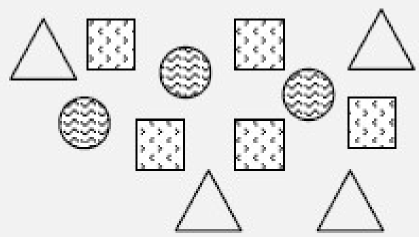


*Figura 29.* Representación gráfica del concepto parte-todo (discreto)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Situaciones como estas es donde pierde sentido la expresión «se divide en partes iguales», puesto que en el caso que se muestra en la tarea 3 hay 12 figuras y no todas iguales. Sin embargo, esto no impide decir que 5/12 de las figuras son cuadrados. En este significado también es necesario presentar situaciones y representaciones que dejen claro este significado de fracción como parte-todo en su forma discreta y señalando que no tiene sentido la fracción impropia, si tenemos 6 botellas de gaseosa sería imposible coger 7/6 de esa cantidad de botellas. Quiere decir que, en este caso de parte-todo discreto, hay fracciones que tienen sentido y hay otras que no lo tienen.

También es considerable atender otro aspecto, y es que en las fracciones, en situaciones como estas, son imposibles de obtener sentido en las fracciones y que requieren de la construcción de otras nociones para hacer posible su solución. Nos referimos al caso de que en una cantidad de 12 caramelos quiera coger 6/8 de esa cantidad, es decir 6/8 de los 12 caramelos, esto es aparentemente imposible. Podrán resolverlo solo aquellos que hayan construido la noción de fracción equivalente, y sabiendo que 6/8 es equivalente a ¾ y ¾ de 12 caramelos sí es factible y son 9 caramelos. Esta situación nos lleva a tomar en consideración que hay conocimientos que se van dando a la vez, es como que se sobrepone su aprendizaje. Esta naturaleza de simultaneidad de construcciones suelen generar muchas dificultades en los estudiantes.

La complejidad de las tareas puede observarse como en el ejemplo mencionado de los caramelos que reúne más de una noción puesta en juego (fracción parte-todo discreto y equivalencias), también como el ejemplo siguiente que implica el significado parte-todo discreto pero no es exclusivo solo a este, sino que se moviliza a otro de los que veremos más adelante (fracción como operador).

Tarea 4: Pintar ¾ de la cantidad de bolas de la figura.

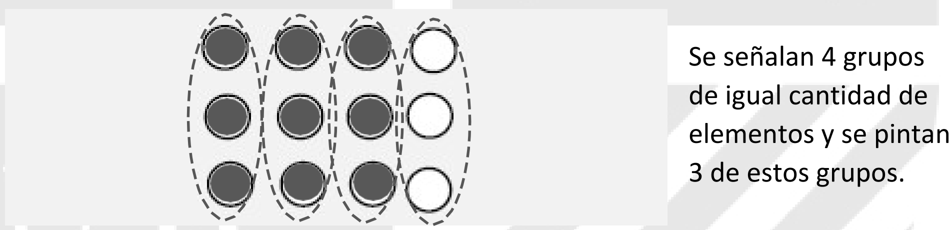



*Figura 30.* Representación gráfica del concepto parte-todo (discreto)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Ferreira Da Silva (2005) propone otra tarea que involucra la noción de fracción parte-todo discreto.

Tarea relacionada también con el concepto de parte-todo discreto.

Tarea 2: Pedro tiene 3 canicas, Joao tiene 4 y Marcos tiene 5 canicas. ¿Qué parte del total de canicas tiene cada uno?

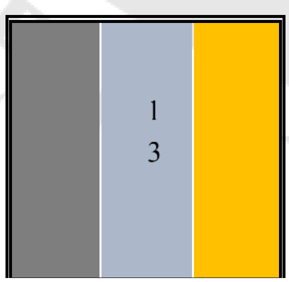

*Figura 31.* Concepción parte todo (discreto)
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Para ello, muestra esta resolución gráfica y simbólica de las partes del total de canicas que le corresponde a cada uno. Este conjunto de canicas se ha conformado por la agrupación de las tres partes mencionadas, donde cada canica representa $\frac{1}{12}$ del total.

Nuevamente se señala la importancia de trabajar los diferentes significados de las fracciones, puesto que solo uno o algunos de ellos no son suficientes para entender y resolver las distintas tareas que se presenta. En este significado parte-todo discreto y continuo, se trabaja la expresión a/b, donde a es la cantidad de *partes* de un *todo* dividido en b *partes* en total y debe resaltarse lo importante de trabajar con la representación gráfica y simbólica de la fracción y lo distinto que es trabajar con el proceso de construcción conceptual.

Al respecto, Fandiño (2009) señala que se debe poner atención a algunos aspectos mencionados para evitar errores típicos en la concepción de fracciones en los estudiantes.

- Trabajar con la relación *igual* en algunos casos y *equivalente* en otros.
- Tratar con el cuidado respectivo el sentido de la fracción propia e impropia en cada situación.
- Entender el sentido de *partes iguales* en la distribución de una unidad para el concepto de fracción (en ambos casos se tiene 1/3 de color celeste).



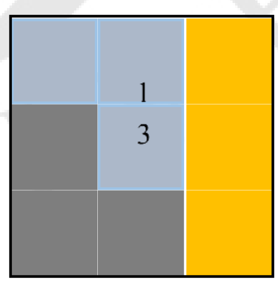



*Figura 32.* Representación gráfica de 1/3.

En este último caso es necesario, al hablar de fracción, introducir nociones como extensiones equitativas, congruentes, sobrepuestas. Por lo general, la idea de encontrar de manera rápida modelos concretos a las diferentes situaciones hace que en ciertos casos no sea favorable, puesto que se crea la «imagen conceptual» de lo que el niño está construyendo y surgen así obstáculos didácticos para la construcción de conocimiento.

#### 4.2.2. Fracción como cociente

La fracción como cociente se presenta en situaciones de reparto, cuando un todo o «unidad» se distribuye de manera equitativa entre un número de personas o de partes. De esta manera Ferreira Da Silva (2005) señala que los fenómenos asociados al concepto de fracción como cociente están relacionados con la operación de dividir un número natural por otro (a÷b = a/b). En este significado, es posible ver la fracción $\frac{a}{b}$ como una división no necesariamente efectuada sino simplemente indicada, es decir, para a÷b la interpretación más intuitiva que tenemos es la de «hay a objetos y los dividimos en b partes». A diferencia de las situaciones anteriores, en esta «a» puede ser mayor, menor o igual que «b».

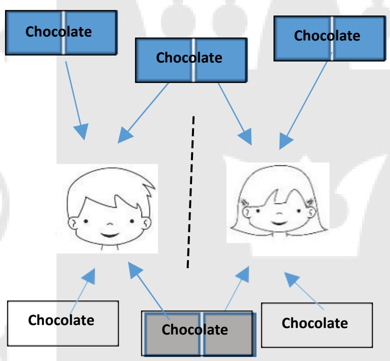
Por ejemplo, al dividir tres pizzas entre 5 personas, ¿cuánto le tocaría a cada uno?

- Una forma de proceder sería dividir 3÷5 y al resolver la operación podría representarse en notación decimal como 0,6 de pizza a cada uno.
- Otra forma sería el dejar 3÷5 indicado y quedaría $\frac{3}{5}$ de pizza a cada uno.

Este significado conecta bastante directo la noción de fracción con la de decimal y tiene diferentes representaciones.

A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción como cociente.

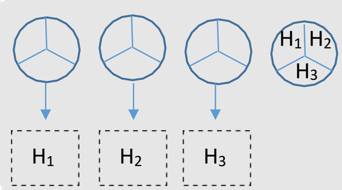
**Concepto de fracción parte-todo como cociente***

| Representación gráfica | Expresión verbal | Representación simbólica |
|---|---|---|
| *Se reparte 3 chocolates iguales entre 2 amigos de manera equitativa. Observa:*<br> | - *Cada amigo recibe tres medios de chocolate.*<br><br>*O también:*<br><br>- *Cada amigo recibe un chocolate y medio.* | *Cada amigo recibe* $\frac{3}{2}$ *de chocolate.*<br><br>*Es decir, para saber cuánto recibirá cada amigo, se tendrá que dividir 3 entre 2.*<br><br>*Por lo tanto, cada uno recibirá:*<br>$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ *de chocolate* |

**Ejemplo**

**Si se comparte 4 pastelitos entre 3 hermanos, ¿qué cantidad de pastelitos recibirá cada hermano?**

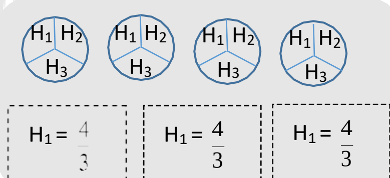
*Esta es una forma de repartir los pastelitos.*




*Respuesta:*

*Cada hermanito recibirá* $1\frac{1}{3}$ *de pastel*

*Esta es otra forma de repartir los pastelitos.*




*O también*

*Cada hermanito recibirá* $\frac{4}{3}$ *de pastel*

*Figura 33.* Representaciones del concepto de fracción como cociente.
*Esquema adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC-Minedu

Ferreira Da Silva (2005) propone un ejemplo donde conecta los diferentes conceptos de fracciones y sus respectivas equivalencias en representación.

Tipo de tarea: Distribuir igualmente x objetos en un número de y personas.

| |
|---|
| Tarea 1: ¿Cuánto de pizza recibirá cada persona si se distribuye cinco pizzas entre cuatro personas? |

Tarea relacionada con el concepto de fracción como cociente.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

En esta tarea se propone, como se observa en la figura a continuación:

- En la primera forma, dividir cada pizza en 4 partes iguales dándole a cada persona 5 de esas partes, recibiendo cada uno 5/4 de pizza.
- En la segunda forma, a cada persona se le da una pizza entera y solo se divide la última en 4 partes iguales, recibiendo cada una $1\frac{1}{4}$ de pizza.

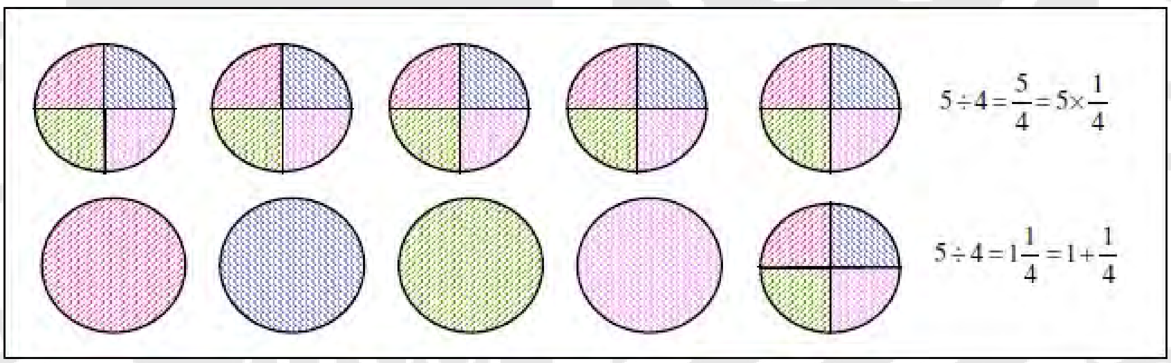



*Figura 34.* Representación gráfica del concepto de fracción parte-todo, reparto.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

En estas representaciones y de la manera que se ha operado en ellas, se establece la siguiente equivalencia:

$$5 \div 4$$

$$\underbrace{\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}} \qquad \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = \underbrace{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{5 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}}$$

Estas son situaciones basadas en el reparto y generan el concepto de fracción desde otro significado donde se involucra también la noción parte-todo. Esto se confirma en la Teoría de los campos conceptuales cuando Moreira (2002, p. 15) señala que «la adquisición de los conocimientos es moldeada por las situaciones y problemas previamente dominados, por lo tanto, muchas características contextuales».

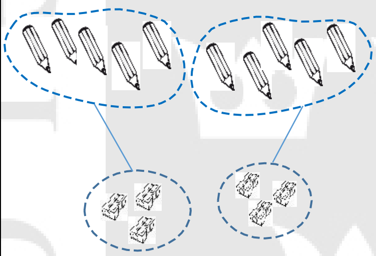
### 4.2.3. Fracción como razón

Este significado surge de sentidos muy distintos a los anteriores. En él no estamos dividiendo un conjunto ni un todo en partes iguales, tampoco estamos repartiendo una cantidad de elementos en ciertos grupos. En este caso en particular, al margen de dividir o repartir cantidades, lo que se hace es *comparar* cantidades ya sean continuas o discretas y estas situaciones de comparación pueden darse entre dos cantidades de la misma o diferente magnitud.

De esta manera, Ferreira Da Silva (2005) manifiesta que las tareas asociadas a la concepción de razón generalmente no permiten asociar la idea de reparto como los conceptos mencionados, sino que asocia la idea de comparación entre dos medidas. Por lo tanto, el sentido de la representación $\frac{a}{b}$ o a ÷ b podría ser entendido como una comparación entre dos cantidades, sin necesariamente transmitir una idea de número. En estas situaciones se parte de una comparación de dos cantidades que se relacionan entre sí, esta relación puede darse de manera exacta o no, lo que da lugar a diferentes representaciones de un número fraccionario.

A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción como razón.

## Concepto de fracción como razón*

| **Representación gráfica** | **Expresión verbal** | **Representación simbólica** |
| --- | --- | --- |
| *Compara la cantidad de lápices y tajadores que están sobre una mesa.*<br> | • Teniendo como referente la cantidad de lápices.<br>✓ *Por cada 5 lápices hay 3 tajadores.*<br>✓ *Por cada 10 lápices hay 6 tajadores.*<br>• Teniendo como referente la cantidad de tajadores.<br>✓ *Por cada 3 tajadores hay 5 lápices.*<br>✓ *Por cada 6 tajadores hay 10 tajadores.* | • Teniendo como referente la cantidad de lápices.<br>$\frac{\#tajadores}{\#lápices} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$<br>• Teniendo como referente la cantidad de tajadores.<br>$\frac{\#lápices}{\#tajadores} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ |

**Ejemplo**

**En cierta aula hay 15 niñas y 20 niños.**
**¿Cuál es la relación que hay entre el grupo de niñas y niños?**

*Respuesta: Se pueden establecer dos tipos de relaciones, esto depende de quién sea el referente.*

*1)* $\frac{niñas}{niños} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ *Esto significa que por cada 4 niños habrá 3 niñas.*

*2)* $\frac{niños}{niñas} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ *Esto significa que por cada 3 niñas habrá 4 niños.*

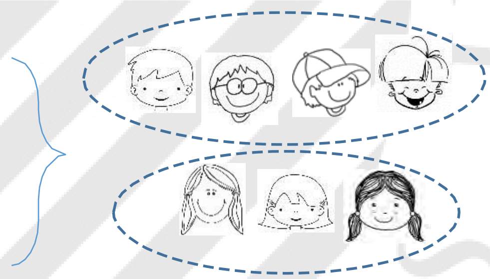


*Figura 35.* Representaciones del concepto de fracción como razón. Adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC - Minedu.

Cuando hay una relación entre a y b (una razón) se establece un índice de comparación entre esas partes y se asocia esta interpretación a la relación parte-parte y a la relación conjunto a conjunto. En estos casos no existe una unidad, un todo que permita ver la fracción. De esta manera, por ejemplo, ⅔ asociado al concepto de razón, no se podrá entender como «dos tercios» pero sí como «dos para tres». Algunas de las situaciones donde se presenta este uso de fracciones están asociadas a mezclas y aleaciones, comparaciones, escalas de mapas y planos, recetas de cocina, entre otras.

Así, si tenemos que una varilla que mide 20 cm de largo y la otra mide 25 cm, podemos decir que la primera varilla es 4/5 de la segunda varilla. También podríamos hablar de cantidades discretas, por ejemplo en una caja hay 9 peras y 12 manzanas, entonces se diría que en esa caja, la cantidad de peras es ¾ de la cantidad de manzanas.

Otra de las particularidades de este modelo es que se relaciona mucho con la proporcionalidad. Por ejemplo, si dos varillas $V_1$ y $V_2$ están en relación de 4/5, estas pueden tener diferentes medidas pero guardando la misma relación o razón, así se tiene:

Tabla 3

*Longitud de las varillas $V_1$ y $V_2$.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Varilla $V_1$ | 8 | 12 | 16 | … | A |
| Varilla $V_2$ | 10 | 15 | 20 | … | B |

Todas estas representan medidas posibles de las dos varillas. Cabe señalar que en este caso es posible que intercambien los elementos si la relación se expresa de manera diferente. Así, diríamos que el $V_2$ son los 5/4 del $V_1$. De esta manera podemos afirmar que $V_1$ y $V_2$ están en relación de 4/5, así como $V_2$ y $V_1$ están en relación de 5/4. Estas dos afirmaciones significan lo mismo ya que en cierto sentido son intercambiables. A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción como razón.

En conclusión, la comprensión de la razón como «*x* es a *y*» implica las equivalencias y el razonamiento proporcional para entender las representaciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Ferreira Da Silva, 2005).

La siguiente figura muestra algunas tareas de fracción como razón.

Tipo de tarea: Determinar una razón.

Tarea 1: Determinar la razón de ampliación o reducción entre las figuras A y B.

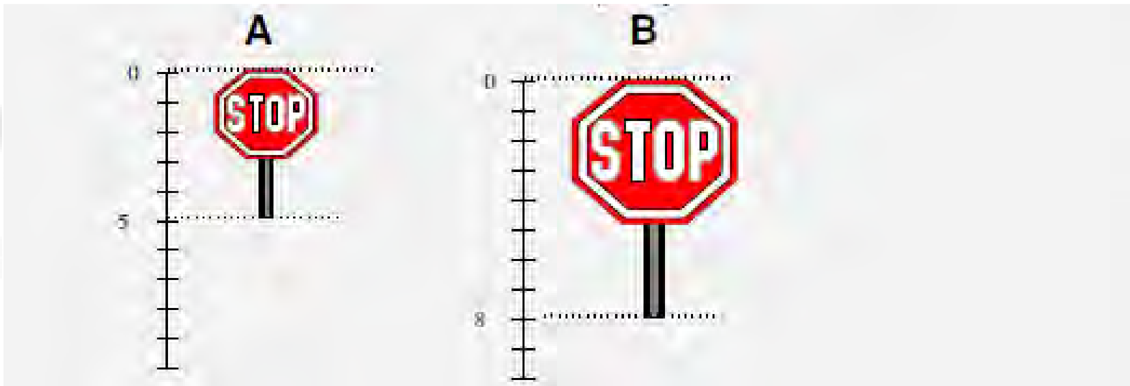



*Figura 36.* Representación gráfica del concepto de fracción como razón.

Fuente: Ferreira Da Silva (2005).

Para resolver este tipo de tareas se compara las alturas de ambas figuras y se establece la razón de comparación, es decir, la medida de la altura de la figura A es 5 unidades y la de la figura B es 8 unidades, entonces la razón de ampliación de A para B es «5 para 8» o «5 es a 8». También se pudo responder en función a la reducción, es decir la razón de B para A es «8 es a 5».

Observamos otro ejemplo de razón parte-parte con cantidades continuas en el siguiente ejercicio:

| |
|---|
| Tarea 5: Para preparar una jarra de refresco se utiliza 3 vasos de jugo y 12 vasos de agua. ¿Cuál es la razón de jugo para agua? |

Tarea relacionada con el concepto de fracción como razón.

Fuente: Ferreira Da Silva 2005

Esta tarea trae implícita la noción de fracción y se podría decir que «para tres vasos de jugo se usa 12 vasos de agua», esto es «1 es a 4», es decir, la cantidad de vasos de jugo es $\frac{1}{4}$ de la cantidad de vasos de agua.

El modelo trabajado en esta concepción de fracción como razón confirma lo que Vergnaud señala en Molina (2002, p. 24) acerca de la teoría de campos conceptuales al decir que «son las situaciones las que dan sentido al concepto, los invariantes operatorios los que constituyen su significado y las representaciones simbólicas su significante».

Las dificultades alrededor de este concepto de fracción como razón, es que en las escuelas no se trabaja la comprensión del mismo ni se apoya en representaciones diversas tanto gráficas como simbólicas y se pasa directamente a realizar un trabajo de cálculo respondiendo a un planeamiento algorítmico, muchas veces no entendido.

### 4.2.4. Fracción como operador

En esta noción la fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de división y multiplicación, para luego transformarla en una nueva cantidad. Este significado de operador multiplicativo es el más usado en la escuela. Por ejemplo, se pide coger los 3/5 de 15 lápices que hay en una mesa e inmediatamente se lleva a traducir que «de» significa «por» para plantear $\frac{3}{5} \times 15$ y luego operar de la siguiente manera (15 ÷ 5) × 3, es decir, coger 9 lápices. Podemos ver que la fracción como operador actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos.

Como vemos, este significado es muy lejano de aquel inicial de parte-todo. Como afirma Kieren (Perera y Valdemoro, 2007), el papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente.

Ferreira Da Silva (2005), señala que la fracción $\frac{a}{b}$ funciona como operador al ser interpretada como «algo que actúa sobre una cantidad». Es decir, cada uno de los elementos de la fracción tiene distintas implicaciones en el resultado final, las cuales son multiplicar por a y dividir por b. En este caso, no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b, de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b. Además, la fracción es interpretada como algo que actúa y modifica una situación, es decir, asume un papel transformador realizando una secuencia de operaciones de multiplicación y división.

A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción como operador.

**Concepto de fracción como operador***

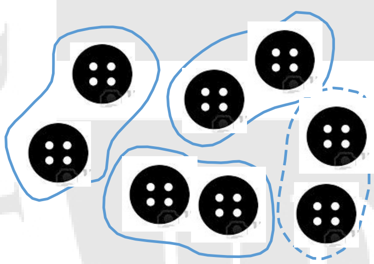
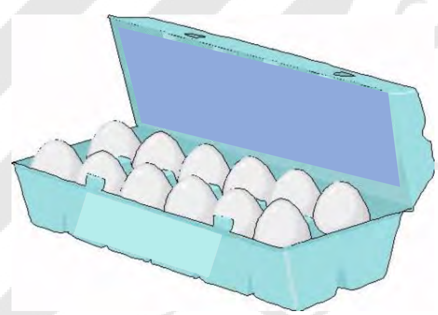
<table>
<tr><th>Representación gráfica</th><th>Expresión verbal</th><th>Representación simbólica</th></tr>
<tr>
<td>Se utilizan los $\frac{3}{4}$ de los 8 botones mostrados<br></td>
<td>$\frac{3}{4}$ de los 8 botones, se forman 4 grupos iguales y se toman 3 de ellos.<br>Entonces los $\frac{3}{4}$ de 8 botones son 6 botones.</td>
<td>$Los\ \frac{3}{4}\ de\ 8\ botones = ?$<br>Se procede:<br>$\frac{3}{4} \times 8 = 3 \times 2 = 6\ botones$<br>O también:<br>$\frac{3}{4} \times 8 = (8 \div 4) \times 3 = 2 \times 3 = 6$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Ejemplo<br>Al caerse la caja de huevos mostrada, se rompieron $\frac{2}{3}$ de los 12 huevos. ¿Cuántos huevos se rompieron?<br>Respuesta:<br>$\frac{2}{3}\ de\ 12 = \frac{2}{3} \times 12 = 2 \times 4 = 8$ huevos<br></td>
</tr>
</table>

*Figura 37.* Representaciones del concepto de fracción como operador. Adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC - Minedu

Por ejemplo:

Tipo de tarea: Transformar cantidades por la acción de un operador fraccionario

| Tarea 1: Construir un cuadrado cuyo lado tenga ⅔ de la medida del lado del cuadrado dado. (Lado del cuadrado dado mide 9 unidades). |
|---|

Tarea relacionada con el concepto de fracción como operador.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

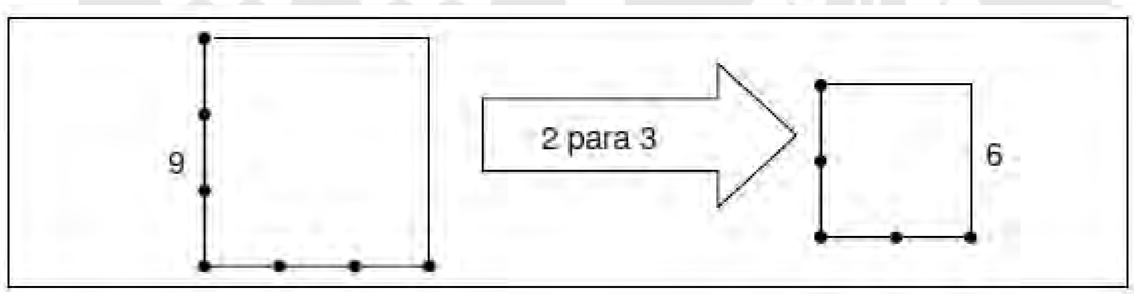



*Figura 38*. Representación gráfica de concepto de fracción como operador.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

Para resolver esta tarea se puede aplicar la siguiente técnica: el cuadrado presenta como medida de lado 9 y este debe ser transformado en un nuevo cuadrado de medida ⅔ de 9. Entonces, primero se realiza 9 ÷ 3 para luego multiplicar el cociente por 2, obteniendo la medida aproximada de 6, es decir:

$$\frac{2}{3}\, de\ 9 = \frac{2}{3} \times 9 = (9 \div 3) \times 2 = 6$$

Estos pasos pueden ser relacionados con los momentos del operador cuando actúa sobre un estado inicial, para modificarla y conseguir un estado final.

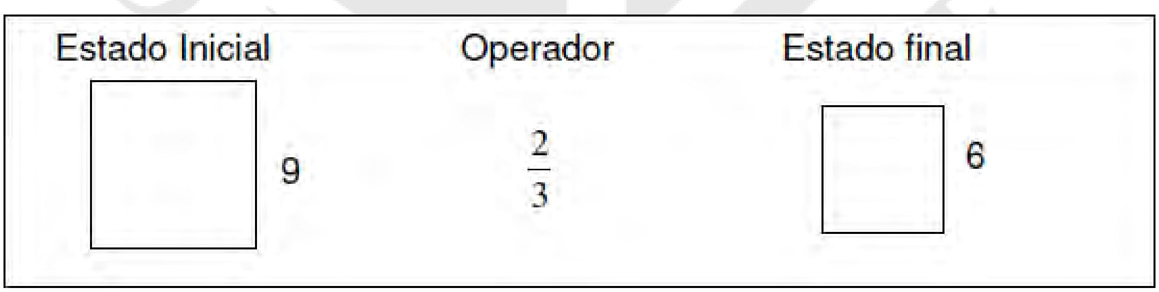



*Figura 39.* Establece el diseño de fracción como operador, caso continuo.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

Este caso puede ser también resuelto asociado a proporciones, de la forma $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$ Donde resuelve $x = \frac{2 \times 9}{3} = 6$

La dificultad de alcanzar la comprensión de este significado es que también existe la posibilidad que sea trabajado solo como algoritmo sin llegar a la construcción y comprensión del mismo. En la teoría de los campos conceptuales se hace énfasis tanto a la situación como a las representaciones. Ante esto, Molina (2002) señala que en la adquisición de concepciones el sistema de percepción visual tiene una importancia relevante en la construcción de conocimientos por los sujetos, sin embargo, se ha dado poca atención al papel funcional de esas concepciones. Entonces, para los maestros es necesario alternar con distintos recursos y representaciones para que los estudiantes comprendan lo que trabajan y no solo sigan rutinas operativas establecidas como respuesta de una palabra clave.

#### 4.2.5. Fracción como medida

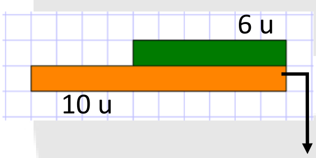
Es frecuente confundir esta noción con el uso de unidades de medida. Por ejemplo: 0,75 litros de gaseosa, que no es la fracción como medida porque ¾ de un litro es la capacidad de la botella y no es una parte del todo a diferencia de una botella de un litro que está llena hasta los ¾ de la misma. Un caso similar sería una cinta de ½ metro de largo.

Estas situaciones de medida se podrían explicar a partir de situaciones en las que se miden las longitudes de algunos objetos, pues ellas reflejan las limitaciones de los números naturales para poder expresar con estos los resultados de una medición buscando mayor exactitud. Surge entonces la necesidad de tener nuevos números para cuantificar estas medidas de longitud. Es así como manipulando un patrón, llamado unidad de medición, entendemos que medimos cantidades continuas y el recuento de cantidades discretas. En este caso tenemos como resultado medidas que no son ni múltiplos ni divisores de la unidad utilizada y esto genera números fraccionarios para indicar la comparación realizada.

En esta noción la fracción surge de comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas, es el referente para medir y la otra, es la que se quiere medir. Kieren, citado en Perera (2007), señala que la fracción como medida es la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad.

A continuación se presenta un esquema que muestra este significado de fracción como medida.

**Concepto de fracción como medida***

| Representación gráfica | Expresión verbal | Representación simbólica |
|---|---|---|
| • *¿Cuántas regletas verdes representan la regleta naranja?*<br><br><br>*Referente* | • *Una regleta naranja equivale a* $1\frac{4}{6}$ *de una regleta verde.* | *Regleta verde= V*<br>*Regleta naranja= N*<br>• $N = 1\frac{4}{6}V$<br>• $V = \frac{6}{10}N$ |
| • *¿Qué parte de la regleta naranja representa la regleta verde?*<br><br><br>*Referente* | • *Una regleta verde equivale a los* $\frac{6}{10}$ *de una regleta naranja.* | |

**Ejemplo**

*La capacidad de una caja permite guardar, como máximo, 20 conservas de 80 g cada una. Si utilizamos la misma caja para guardar 12 conservas similares a las anteriores, ¿qué parte de su capacidad máxima se estará usando?*

*Comparamos las 12 conservas con la capacidad máxima de la caja (20 conservas).*

$$\frac{12\ conservas}{20\ conservas} = \frac{3}{5}\ de\ su\ capacidad$$

Respuesta: *Se estará utilizando los 3/5 de la capacidad máxima de la caja.*

*Figura 40.* Representaciones del concepto de fracción como medida. Adaptado del Informe Pedagógico de la Evaluación Muestral 2013 aplicado a los estudiantes de 6.º grado de primaria a nivel nacional. UMC - Minedu

Con relación a las tareas y técnicas vinculadas al concepto de fracción como medida, Ferreira Da Silva (2005) presenta algunas tareas:

Tipo de tarea: Determinar medidas de los segmentos divididos en partes iguales.

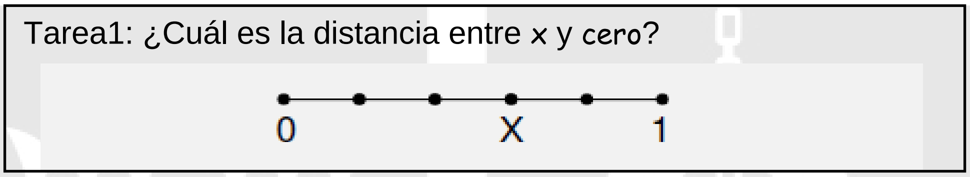



*Figura 41.* Representación gráfica del concepto de fracción medida.
Fuente: Silva (2005).

Esta tarea se puede resolver por la técnica del doble conteo de las partes. Se considera a la unidad dividida en 5 partes de igual longitud y del punto «0» al punto «X» se cuenta tres partes, por lo que se indica que la fracción es 3/5. El modelo se asocia a tareas que están directamente relacionada con el concepto de parte-todo.

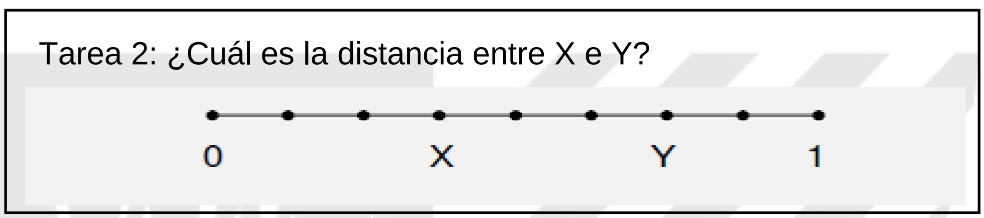



*Figura 42.* Representación gráfica del concepto de fracción medida.
Fuente: Silva (2005).

Esta tarea se puede realizar también con el conteo de partes, como en la noción parte-todo: primero, se debe identificar cuál es la unidad (de 0 a 1) y en cuántas partes iguales ha sido dividida esta unidad; luego, se ubica los puntos de referencia X e Y para medir la distancia entre ellos asociando esta medición con la longitud con 3/8. En este tipo de tareas, la variación del objeto a medir puede variar hasta requerir tareas cada vez más complejas como las que tienen los esquemas mayores que 1. Estas tareas permiten el uso de la medida tanto en forma mixta como impropia y también se puede relacionar con la suma de fracciones. El siguiente gráfico ilustra estos ejemplos de impropias y mixtas.

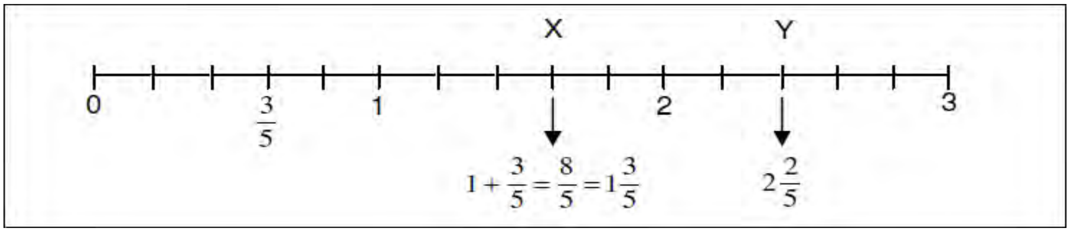



*Figura 43.* Representación gráfica del concepto de fracción medida.
Fuente: Silva (2005)

Tipo de tarea: determinar medidas de los segmentos no divididos en partes iguales.

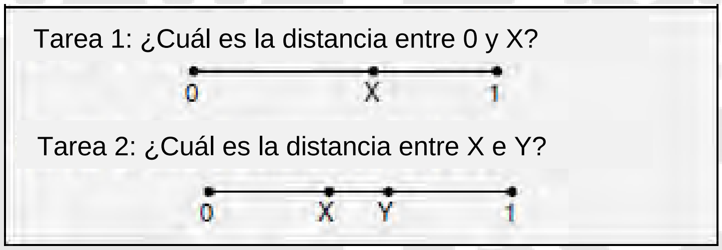



*Figura 44.* Representación gráfica el concepto de fracción medida.
Fuente: Silva (2005).

En estas tarea conviene hacer una división del entero (unidad) en partes de la misma medida y de esa manera se podrá utilizar la técnica del doble conteo para encontrar la medida de 0 a X y de X a Y.

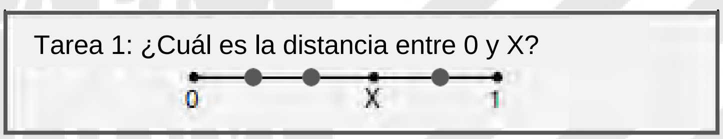



*Figura 45.* Respuesta de Figura 44.

De esta manera, en la tarea 1 se divide la unidad en partes de igual medida, se estiman distancias y se vuelve a contar las partes desde el cero hasta X, por ende, la distancia es 3/5.

De la misma manera se procede en la tarea 2, donde se busca dividir la unidad en partes iguales, de forma que se tendría la siguiente gráfica:

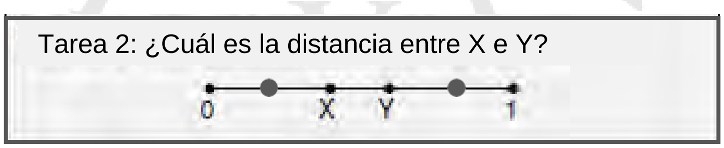



*Figura 46.* Respuesta de Figura 44.

Con la técnica del doble conteo, la distancia entre X e Y es 1/5.

3° Tipo: reconstrucción de unidades

Tarea: Si el dibujo a continuación representa ⅔ de la unidad, ¿cuál es la unidad?

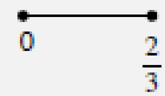



*Figura 47.* Representación gráfica del concepto de fracción como medida
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

En esta tarea se comienza identificando el segmento dado como parte de una unidad, en este caso representa dos tercios y por lo tanto, la unidad completa fue dividida en tres partes de la misma longitud. Para recomponer la unidad original es necesario dividir el segmento dado en dos partes de la misma medida porque es ⅔ del segmento, luego identifica ⅓ y elabora la nueva figura con tres de esas partes como se indica en la figura siguiente:

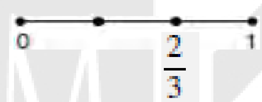



*Figura 48.* Representación gráfica del concepto fracción como medida.
Fuente: Ferreira Da Silva (2005)

Este concepto de fracción es ideal para presentar medidas menores, iguales o mayores que 1. También sirve como soporte para la comprensión de adiciones y sustracciones con fracciones del mismo denominador así como trabajar fracciones equivalentes.

La teoría de campos conceptuales sirve de soporte para explicar los procesos necesarios en el aprendizaje de la Matemática, en especial en los conceptos de fracciones. Lo primero es señalar, como indica Vergnaud, que la teoría de los campos conceptuales tiene su punto de partida sobre un principio de elaboración de los conocimientos a partir de la práctica misma del estudiante: «No se puede teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas ni a partir sólo del simbolismo, ni a partir sólo de las situaciones» (Vergnaud, 1990, p. 20). Por tanto, es necesario analizar el sentido de estos elementos, tanto de las situaciones y de los símbolos en función a la acción misma del sujeto en situación, y la organización de su conducta. Es necesario para el aprendizaje de los conceptos de la fracción que sea el mismo estudiante el centro de la actividad quien, con su conducta, ponga en juego esquemas adquiridos y logre generar otros esquemas nuevos a partir de ellos. Los conocimientos que logre alcanzar el sujeto están atados a un proceso de logros previos y construcción de otros que se van desarrollando a lo largo del tiempo. Por ello, como menciona Vergnaud (1990),

> … es necesario por tanto conceder una gran atención al desarrollo cognitivo, a sus continuidades, a sus rupturas, a los pasos obligados, a la complejidad relativa de las clases de problemas, procedimientos, representaciones simbólicas, al análisis de los principales errores y de los principales descubrimientos (p. 21).

# CAPÍTULO V

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

### 5.1. Tipo de investigación

El presente trabajo es una investigación cualitativa de tipo descriptiva, sobre las concepciones matemáticas que poseen los docentes en formación inicial acerca del concepto de fracción según sus significados y sus diferentes representaciones. Se propone realizar descripciones a partir de la observación realizada del desempeño de los docentes en formación en las sesiones de trabajo como también de la evidencia de sus respuestas al aplicar los instrumentos escritos. Es de carácter cualitativo al basarse en el recojo de información de manera natural de las intervenciones de clase, de la manipulación de materiales, de la interacción entre pares y diversos tipos de estrategias utilizadas que nos permita indagar acerca de las capacidades puestas en juego al comunicar y representar sus ideas matemáticas, hacer uso de diversas estrategias como también sus habilidades al justiciar sus procesos de solución en tareas que involucran las nociones de fracción y su significado, que tienen los docentes en formación. De esta manera, el conjunto de situaciones, concepciones y representaciones forma un todo coherente para constituir un campo conceptual dado, donde se evidencie las conexiones y las dificultades presentadas.

### 5.2. Participantes en el proceso

Esta investigación se realiza en una universidad privada de Lima que tiene una población de aproximadamente 120 docentes en formación, tanto para enseñar en el nivel inicial como en primaria. Se trabajó con una muestra de 22 docentes que cursan el IV ciclo de Formación inicial primaria, en quienes se explorará el dominio del concepto de las fracciones y las concepciones que los llevan a errores en el manejo y comprensión de los diferentes significados en el concepto.

### 5.3. Fases del Proceso

La experiencia se llevará a cabo en tres fases: una de diagnóstico, otra de ejecución y una última de evaluación.

En la primera fase, la de diagnóstico, se aplicará una prueba que permita indagar entre los estudiantes de Educación sobre el grado de manejo y comprensión de los conceptos de fracción en sus distintos significados (como parte-todo, como cociente, como operador, como razón y como medida) y la forma de representarlos en distintos contextos ya sean continuos o discretos. Esta aplicación tomará dos horas.

En la segunda fase, la de ejecución, se realizará en dos encuentros cada uno de dos horas. Estos se darán durante una semana, en donde se propone desarrollar una serie de actividades que permitan realizar tareas que involucran el concepto de fracción a partir de sus diferentes significados, los que serán abordados en el siguiente orden: la fracción como parte-todo en el primer encuentro, la fracción como cociente y la fracción como operador en el segundo encuentro, y la fracción como razón y como medida en el tercero, así como también la integración de distintas capacidades matemáticas en las diversas actividades. Se propone usar variados recursos didácticos como regletas, papeles con dobleces, etc., que permitan desarrollar diferentes procedimientos y utilizar variadas representaciones entre intuitivas y formales.

En la tercera fase, la de evaluación, se aplicará a los participantes una encuesta consistente en dos preguntas, lo cual se llevará a cabo los últimos minutos del último encuentro con el objetivo de evidenciar y valorar los avances que se han alcanzado en las diferentes sesiones de trabajo.

A continuación se presenta el plan de trabajo propuesto en el desarrollo de la investigación especificando cada fase del proceso y el tiempo.

**Plan de trabajo de las fases del proceso**

<table>
<tr><td>TÍTULO DEL PROYECTO</td><td colspan="2">COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN LOS ESTUDIANTES EN FORMACIÓN INICIAL DE EDUCACIÓN PRIMARIA. UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA DE CAMPOS CONCEPTUALES</td></tr>
<tr><td>OBJETIVO</td><td colspan="2">Analizar las concepciones de fracción que tienen los estudiantes en formación inicial de primaria a fin de proponer una guía de trabajo que les permita fortalecer la comprensión del concepto de fracción en sus distintos significados a partir de una variedad de contextos y del uso de diversas representaciones.</td></tr>
<tr><td>COMPONENTES TEMÁTICOS</td><td colspan="2">El concepto de fracción se abordará desde cinco diferentes interpretaciones:<br>1. La fracción como parte-todo<br>2. La fracción como cociente<br>3. La fracción como operador<br>4. La fracción como razón<br>5. La fracción como medida</td></tr>
<tr><td>PROCESO</td><td colspan="2">El trabajo se realizará durante 3 encuentros, uno de evaluación diagnóstica y los otros dos de encuentro-taller. En ellos se desarrollarán guías de actividades con situaciones del contexto real que permita la conceptualización de las fracciones, donde los estudiantes trabajarán en equipos pequeños, resuelven la guía, la analizan y plantean estrategias de solución, para luego compartir y discutir sus soluciones, atender las dificultades y errores presentados. De esta manera se busca institucionalizar el conocimiento.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">FORMA, ESPACIOS Y TIEMPO</td><td colspan="2">FASE DE DIAGNÓSTICO</td></tr>
<tr><td>Primer encuentro<br>2 horas</td><td>Diagnóstico y presentación del proyecto</td></tr>
<tr><td colspan="2">FASE DE EJECUCIÓN</td></tr>
<tr><td>Segundo encuentro<br>2 horas</td><td>Fracción como parte-todo</td></tr>
<tr><td>Tercer encuentro<br>2 horas</td><td>La fracción como cociente<br>La fracción como operador<br>La fracción como razón<br>La fracción como medida<br>Encuesta</td></tr>
<tr><td colspan="2">FASE DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con la encuesta en el tercer encuentro.</td></tr>
</table>

## 5.4. Instrumentos

Los instrumentos que se aplicarán en la presente investigación son instrumentos validados que han sido tomados de la investigación *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota* de Claudia Patricia Hincapié Morales, con la que optó por el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de Colombia.

Se toma los instrumentos de dicha investigación que están ya validados y ponen énfasis en el concepto de fracción en sus distintos significados a nivel de docente en formación, a su vez dichos instrumentos han contemplado como base teórica de referencia la Teoría de Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud. Son estos dos aspectos los que dan la relevancia a los instrumentos a utilizar para confirmar lo planteado en este trabajo.

### Fase de Diagnóstico

En esta fase se aplicará la Prueba Diagnóstica elaborada por Claudia Patricia Hincapié Morales (2011) para tener las evidencias de la situación real de las concepciones de los estudiantes con respecto a las fracciones al explorar los conocimientos previos de los estudiantes de Educación referentes a la comprensión de las fracciones y sus diferentes interpretaciones. Este instrumento presentará situaciones de enseñanza y aprendizaje que involucran los diferentes significados de las fracciones en contextos continuos y discretos y con la posibilidad de manipular diferentes materiales concretos. El instrumento originalmente está conformado por 10 problemas, a razón de 2 problemas por significado: parte-todo, cociente, operador, razón y medida. Sobre esta base, para la presente investigación se ha decidido aplicar solo 6 preguntas, una por cada significado, además del concepto parte-todo que será abordado tanto en contexto discreto como continuo.

Los instrumentos utilizados en esta fase se presentan en el Anexo 2. Sin embargo,

**Fase de Ejecución**

Esta etapa de la experiencia se desarrolla tomando como base el análisis de los resultados que se obtuvieron en la fase de diagnóstico. El propósito de esta fase consiste en realizar 3 sesiones de trabajo y en cada una de ellas se plantean situaciones problema con la finalidad de fortalecer cada uno de los diferentes significados de la fracción a través del uso de diversos recursos didácticos como regletas, papeles, dobleces, etc.

El planteamiento de las situaciones problema se hizo teniendo como base cada una de las interpretaciones del concepto de fracción consideradas en esta experiencia de formación docente. El diseño de las actividades de cada sesión estaba sujeto al análisis y las reflexiones que resultaran en la socialización de cada encuentro. Los instrumentos de esta fase se muestran en el Anexo 2.

**Fase de Evaluación**

En esta etapa se aplicará a los participantes una encuesta consistente en dos preguntas, lo cual se llevará a cabo los últimos minutos del último encuentro con el objetivo de evidenciar y valorar los avances que se han alcanzado en las diferentes sesiones de trabajo. Este instrumento también se encuentra en el Anexo 2.

**5.5. Análisis**

Luego de la aplicación del instrumento a un grupo de 22 estudiantes en formación de Educación Primaria del IV ciclo de una universidad privada, tanto la fase diagnóstico como la aplicación de los 6 instrumentos de la fase de proceso, se realizará el análisis de esta experiencia de formación de manera descriptiva, de clasificación con respecto a la información que se recoja en cada sesión a través de los registros de video, fotografía y escritos (realización de actividades y notas de registro o anecdotario), material que se muestra en el Anexo 3.

La información recogida permitirá analizar las concepciones y conocimientos que tienen los estudiantes tanto al inicio como al final sobre: el concepto de fracción y sus diferentes significados, las diferentes representaciones, materiales y situaciones planteadas que permitan llevarlo al aula para su enseñanza. Asimismo, las dificultades presentadas en el proceso serán analizadas y comprendidas para que sirvan de situación de aprendizaje y permitan la aclaración de concepciones.

Se analizará cada fase de la intervención que permita ver el concepto, las capacidades y los contenidos matemáticos que intervienen en cada una de las tareas planteadas, así como las diversas estrategias y materiales que es plausible emplear. De la misma manera, se toma como base la referencia teórica de los campos conceptuales y se realiza el análisis de cada tarea a la luz de los componentes que conforman la comprensión de un concepto, como son: las situaciones que le dan sentido, el invariante operatorio que es el mismo concepto, propiedades y teoremas; y las representaciones. Esto evidenciará el nivel que tienen los estudiantes de Educación de la comprensión del concepto de fracción según su significado.

Se inició con unas preguntas puntuales acerca de la escritura y representación gráfica de una fracción propia e impropia que fue dada de manera oral. Para ello se les pidió:

a) Escribe el número “tres cuartos” y represéntalo gráficamente. (fracción propia)
b) Escribe el número “tres medios” y represéntalo gráficamente. (fracción impropia)

Como resultados obtuvimos:

a) 22 escribieron correctamente $\frac{3}{4}$ y todos lo representaron gráficamente con un rectángulo o un círculo dividido en 4 partes de las cuales pintaron 3 (parte-todo continuo). (100 %)

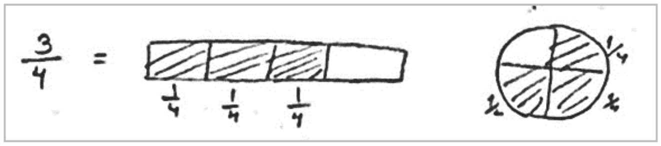


*Figura 49.* Ejemplo de respuesta correcta.

b) 22 escribieron correctamente $\frac{3}{2}$ y solo 3 de ellos (13 %) representaron correctamente de manera gráfica esa cantidad.

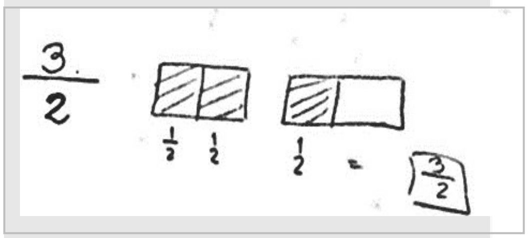
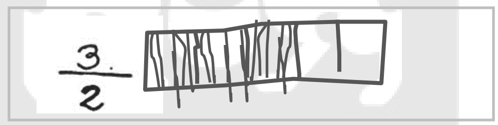
| Respuesta correcta | Respuestas incorrectas |
| --- | --- |
|  |  Tres partes en total y dos de ellas pintadas.  Tres partes pintadas y dos sin pintar. |

*Figura 50.* Ejemplos de respuestas.

Notamos que todos los estudiantes saben leer y escribir las fracciones propias, como 3/4, así como representarlas gráficamente, solo de manera parte-todo continuo, es decir, un rectángulo o círculo dividido en partes iguales, lo que nos indica que los estudiantes conocen y comprenden las fracciones propias. Sin embargo, con la fracción impropia 3/2, solo lograron escribir el número mas no representarlo gráficamente, lo que pone de manifiesto la no comprensión de este tipo de número por parte de los estudiantes.

Esto marca el punto de partida de lo que vamos a investigar. Si se trabaja solo un significado de fracción como es parte-todo, ¿ello será suficiente para la comprensión del concepto de fracción y, por lo tanto, para poder resolver diversas situaciones con fracciones?

Al respecto, Martha Fandiño (2009) señala al analizar los conceptos de fracción, que en la enseñanza de fracción se enfatiza demasiado el concepto parte-todo y, en sí, este único significado de fracción como un todo dividido en partes iguales, no es suficiente para resolver las diferentes situaciones que se presentan con fracciones, donde la fracción impropia, por ejemplo, no tiene sentido lógico. Iniciaremos de esta manera el análisis de la conceptualización de la fracción.

### 5.5.1. Desde la conceptualización del objeto en estudio

Tomando como principal referente la teoría de campos conceptuales de Gerard Vergnaud, cabe señalar que la comprensión del concepto de fracción considera, además de sus diferentes significados, la confrontación de conceptos o preconceptos que se tienen y estos son movilizados por situaciones que le dan sentido y por las diferentes situaciones que se utilizan.

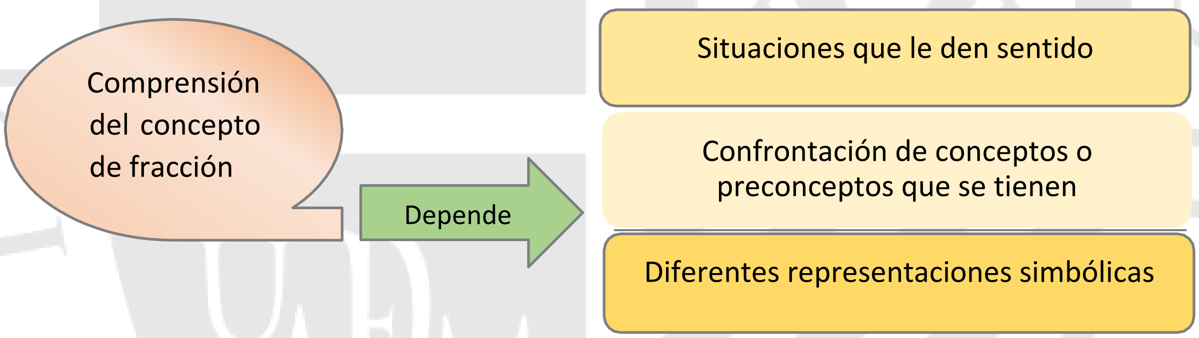



*Figura 51.* Elementos que permiten la conceptualización de fracción.
Fuente: Hincapié (2011)

Realizaremos un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento de la fase de diagnóstico como de los instrumentos de la fase de ejecución a un grupo de 22 estudiantes en formación de Educación Primaria del IV ciclo de una universidad privada. La intención es presentar resultados que nos muestren los logros alcanzados y los errores cometidos para a partir de ellos iniciar la reflexión en torno a diversos aspectos. Por ello, el análisis enfocará primero, las evidencias del concepto de fracción que se dieron en la situación inicial, es decir, en la prueba diagnóstico. Luego, se presentan los aspectos alcanzados en las actividades de ejecución, denominado como percepción final. Por último, se describen las dificultades que se presentan en los diferentes momentos, manteniéndose algunos de ellos hasta los momentos finales.

#### 5.5.1.1. Conceptos de fracción y sus diferentes significados.

**Aspecto: Concepto de fracción**

| Estado Inicial | Percepción final | Dificultades |
|---|---|---|
| Como parte de algo<br><br>Como parte de un todo (continua).<br><br>Como parte de un conjunto de elementos (discreta).<br><br>Como reparto o dividir en partes iguales (cociente).<br><br>Como parte que se obtiene multiplicando y dividiendo (operador).<br><br>Como razón (parte – parte)<br><br>Como medida | Representa una o varias partes iguales de una unidad entera dividida o de un conjunto de elementos.<br><br>Relación cuantitativa entre la parte y el todo, producto de una comparación en situaciones continuas o discretas.<br><br>Interpretación de una situación de reparto en partes equitativas y expresándolas como fracción.<br><br>Se amplió el concepto de fracción como medida, relacionando una parte tomada como unidad con un todo a ser medido.<br><br>Se introdujo la noción de fracción al comparar dos cantidades, ajenas entre sí, llamándolo parte-parte. | Sabían que la unidad se dividía en partes iguales pero solo consideraban porciones congruentes mas no equivalentes.<br><br>Cuando las partes no estaban igualmente divididas no lograban identificar el todo y la parte.<br><br>Identifican la fracción cuando comienzan del todo para buscar las partes mas no a la inversa, comenzar de las partes para reconstruir el todo.<br><br>Identifican la fracción en contextos continuos mas no en contextos discretos.<br><br>No identificaban la fracción cuando esta se subdividía en otras partes.<br><br>Al trabajar con las regletas tienen dificultad al expresar la relación de comparación de medidas entre las mismas.<br><br>Explorando la idea de fracción impropia, tienen dificultades al interpretan y representar la fracción, siendo confuso cuando el que las partes superen el todo.<br><br>Resuelven algunas situaciones de fracciones pero no lo asocian con su notación numérica, como el reparto de tortas. |

Se presenta a continuación algunas evidencias de lo mencionado respecto a concepto de fracción y sus diferentes significados.

**Situación 1.**

1 En clase de Educación Artística los estudiantes están haciendo collares, la profesora les dijo que 4 perlas representaban las 2/5 partes de las perlas para elaborar un collar. Ayúdalos a averiguar, **¿cuántas perlas deben comprar?** **Material concreto**: perlas (frijoles).

Solo 4 de los 9 grupos de estudiantes respondieron correctamente esta situación. Relacionan la fracción con su equivalente, es decir, $\frac{2}{5}$ es 4 perlas, $\frac{1}{5}$ es 2 perlas, así llegan a conformar la unidad o el conjunto total de 4 + 4 + 2 = 10 perlas.

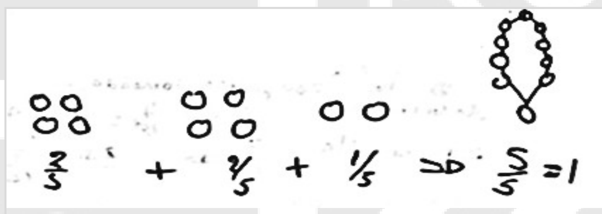



*Figura 52.* Ejemplo de respuesta correcta situación 1

- En esta situación el concepto de fracción se da en su significado parte-todo discreto, formado por grupos de objetos, 4 perlas que conforman $\frac{2}{5}$.
- Se comienza de una parte o fracción para constituir el todo. Parte de $\frac{1}{5}$ para llegar a $\frac{5}{5}$ relacionando una parte son 2 perlas, cinco partes será 10 perlas.


*Figura 53.* Ejemplos de respuestas incorrectas situación 1

- No consideran la cantidad de perlas en cada parte del conjunto y solo relacionan las fracciones con la unidad como una magnitud continua, es decir, tienen $\frac{2}{5}$ y les falta $\frac{3}{5}$ para completar el todo.
- Confunden que la parte dada es una fracción unitaria $\frac{1}{n}$, así, al decir que una parte es 4 perlas, lo asumen como $\frac{1}{5}$= 4 y concluyen que todo es 20. Por tanto, tienen $\frac{2}{5}$ que son 8 perlas y les falta 12 perlas.

**Situación 2.**

2. Juan debe pintar una pared de forma rectangular así:
Roja 6/16 de la pared
Verde 1/8 de la pared
Amarilla 2/4 de la pared
Él está confundido pues no entiende las instrucciones. **Muéstrale cómo debe hacerlo.**
**Material concreto**: cartón, regla y colores.

Ningún grupo de estudiantes logró responder correctamente esta situación que aborda el concepto de fracción en su significado como parte-todo continuo.

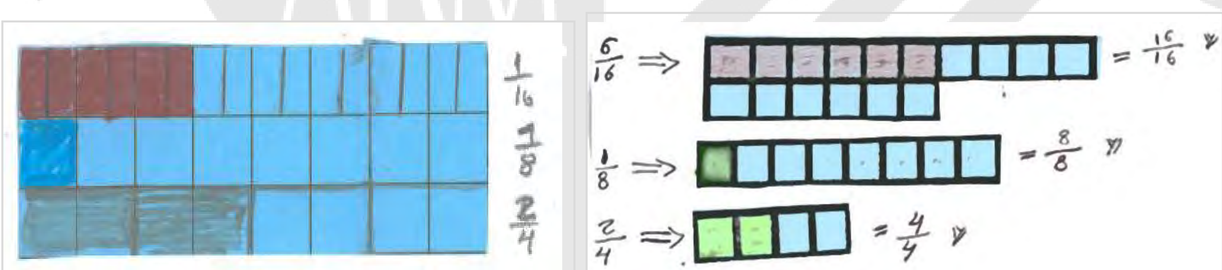



*Figura 54.* Ejemplo de respuestas incorrectas situación 2

- Interpretan cada color de la pared como una fracción en una unidad diferente.
- No consideran toda la pared como una unidad con tres partes independientes pintadas que cubren el todo.

- Se evidencia que una fracción sí la pueden representar gráficamente como parte-todo continuo. Sin embargo, no identifican la fracción cuando esta se subdivide en otras partes.

En la interpretación de la fracción como relación parte-todo cabe que existen ciertos atributos que caracterizan esta relación parte-todo y que deben ser considerados en el momento de la enseñanza, tal como menciona Ruiz (2013):

- Un *todo* está formado por elementos separables que pueden ser objetos, regiones que son vistas como divisibles.
- El *todo* se puede dividir en un número de partes determinado.
- La reunión de todas las partes forman el *todo*.
- Las partes son iguales, por tanto son congruentes. Se refiere a igual tamaño como también igual área.
- Las divisiones y subdivisiones cubren el *todo*. (Los cuartos convertidos en octavos y estos en dieciseisavos cubren la pared completa).
- Las partes se pueden considerar como totalidad. (Con los cuartos divididos por la mitad se obtiene octavos)
- El *todo* se conserva.(p. 65 – 66)

**Situación 3.**

3. Si hay 5 tortas de chocolate y se tienen que repartir en forma equitativa entre cuatro niños. **¿Cuánto le tocará a cada uno?**
   Utiliza diferentes representaciones para responder.
   **Material concreto:** tortas fraccionarias

Esta tarea, 7 de los 9 grupos de estudiantes la respondieron correctamente. Haciendo uso de los círculos de cartulina, los estudiantes lograron hacer el reparto de las tortas en partes iguales entre los cuatro niños.

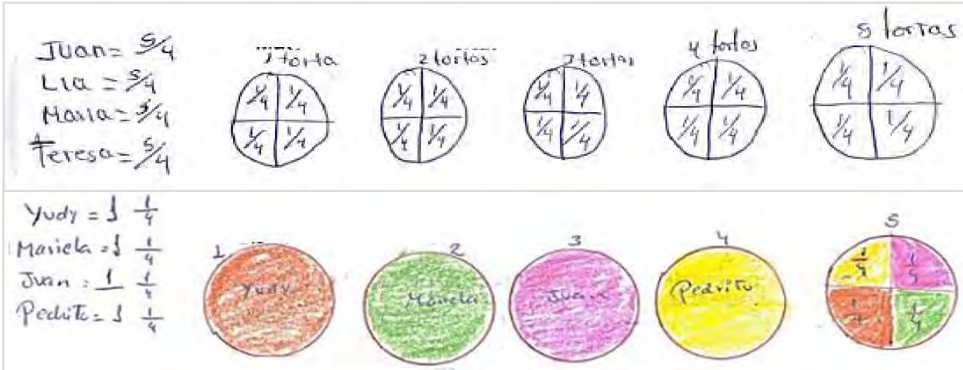



*Figura 55.* Ejemplos de respuestas correctas situación 3

- En esta situación el concepto de fracción se da en su significado de cociente al realizarse el reparto equitativo o la distribución por igual de 5 tortas entre 4 niños.
- Las diferentes representaciones (material concreto, gráfico, expresiones numéricas de adición y notaciones simbólicas de fracción) permitió expresar la cantidad de torta que recibió cada niño. Cabe resaltar que utilizaron ambas clases de fracciones, tanto impropias como números mixtos.
- Es el contexto, la situación planteada, los materiales y recursos utilizados los que permiten generar diversas representaciones y abordar de manera comprensible y razonada el significado de la fracción, entendiendo la cantidad a la que se están refiriendo. Es así como representan que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{5}{4}$ y también equivale a $1\frac{1}{4}$.

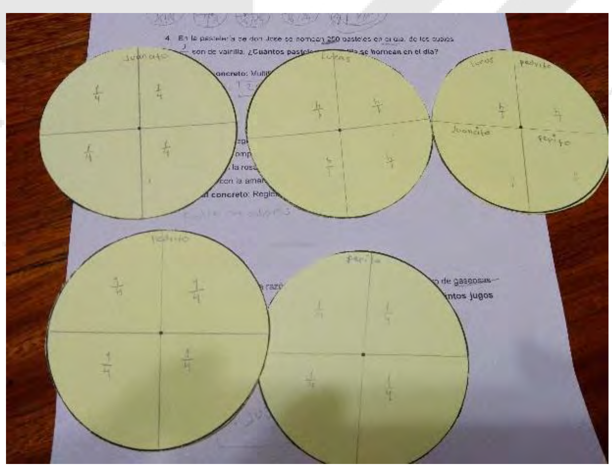


*Figura 56.* Ejemplo de respuesta incompleta situación 3

La dificultad evidenciada en los otros dos grupos fue que realizaron el procedimiento de reparto correcto con los materiales de cartulina pero no lograron simbolizar ni en su representación gráfica, ni su operación, ni su respuesta. Entregaron los materiales trabajados pegados en la hoja. Estos grupos solo mostraron el reparto realizado y no expresaron en fracción la parte que le tocaba a cada niño.

**Situación 4.**

4. En la pastelería de don José se hornean 250 pasteles en el día, de los cuales 3/10 son de vainilla. **¿Cuántos pasteles de vainilla se hornean en el día?**
**Material concreto:** multifichas

Solo 4 de los 9 grupos de estudiantes la respondieron correctamente. En esta tarea el concepto de fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de multiplicación y división para transformarla en una nueva cantidad.

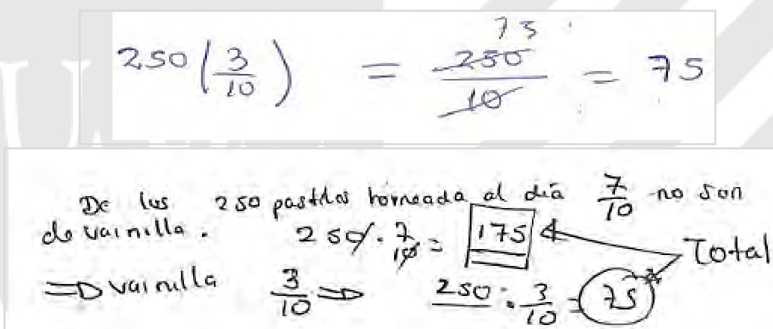



*Figura 57.* Ejemplos de respuestas correctas situación 4

- En esta situación el concepto de fracción se da en su significado de operador al dividir los 250 pasteles en 10 grupos, 250 ÷ 10 = 25 y luego multiplicarse por tres para encontrar la cantidad de pasteles de vainilla.
- Esta situación permite trabajar con la fracción dada $\frac{3}{10}$ o con su complemento.

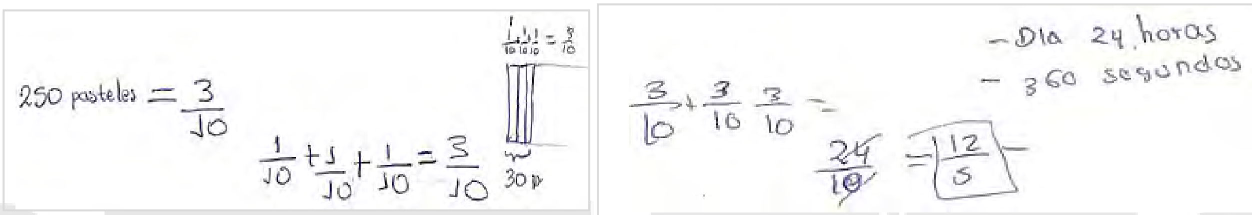



*Figura 58.* Ejemplos de respuestas incorrectas situación 4

La dificultad evidenciada en estos grupos es que no comprenden la situación y no la asocian a otros significados de fracción, forzando su uso con algún procedimiento operativo no pertinente al caso o buscan otras relaciones no coherentes a la situación.

**Situación 5. Fracción como medida**

5. Observen las regletas y escriban en términos matemáticos la relación que encuentran al comparar:
   La blanca con la rosada
   La naranja con la amarilla.
   **Material concreto**: regletas de Cuisenaire

En esta tarea se busaca asociar la comparación entre las longitudes de las regletas mencionadas con la noción de medida. Esta noción de fracción como medida surge de comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas es el referente para medir y la otra, es la que se quiere medir.

Se evidencia que en algunos casos los estudiantes solo contaron cuántas unidades blancas medía cada regleta. En otros casos, comparaban unas regletas con otras pero no establecían relaciones entre sí. En ningún caso expresaron claramente la medida generada por la comparación de las mismas.

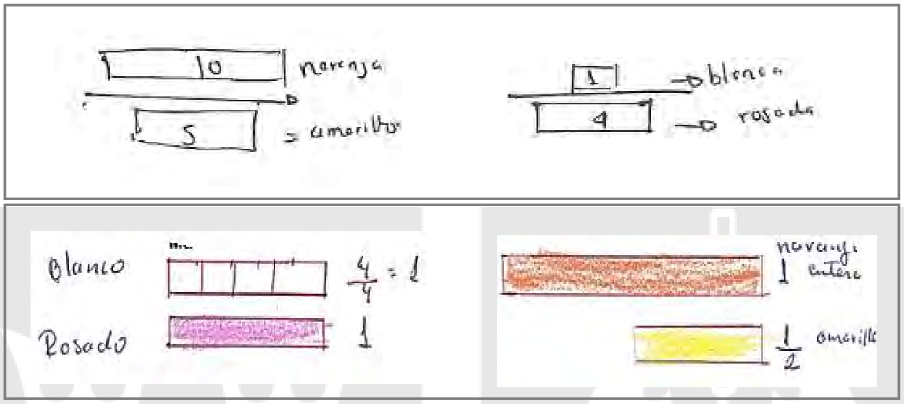



*Figura 59.* Ejemplos de respuestas situación 5

Como se observa, al comparar la regleta naranja con la amarilla algunos señalaban naranja 10 y amarilla 5 unidades. También señalaban naranja 1 y amarillo 2. En estos casos llegaban solo a la medición aislada de las longitudes de las regletas pero no expresaron la comparación entre ellas. Solo un grupo expresó una relación cercana entre las dos regletas al decir que la naranja es 1 y la amarilla es ½, lo que permite afirmar que “la regleta amarilla es ½ de la regleta naranja”. De la misma manera se pudo afirmar que “la regleta blanca es ¼ de la regleta rosada”

Algunos grupos de estudiantes solo graficaron lo que observaron con el material de regletas sin establecer relación alguna. Otros dieron algunas relaciones aritméticas no solicitadas en la tarea, como se observa en la figura 59.

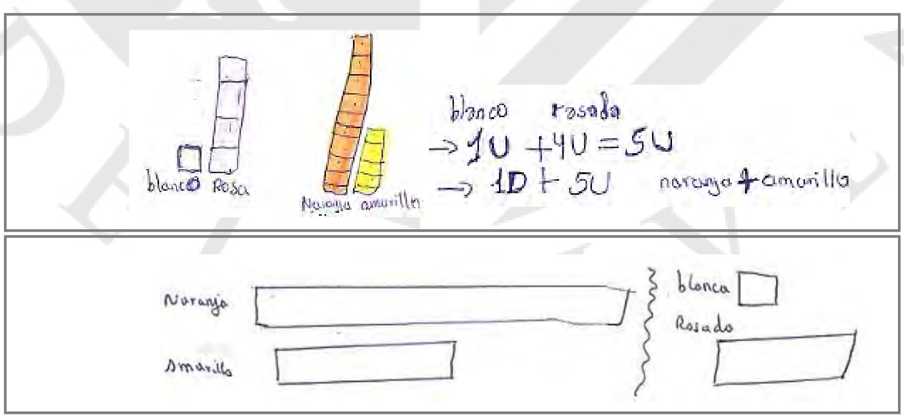



*Figura 60.* Ejemplos de respuestas incorrectas situación 5

**Situación 6. Fracción como razón**

6. En la tienda escolar, la razón entre el número de jugos y el número de gaseosas vendidas es de dos a cinco. Si se vendieron 40 gaseosas, **¿cuántos jugos vendieron?**

Esta tarea, solo 2 de los 9 grupos de estudiantes la respondieron correctamente. Los estudiantes se basan en la relación entre jugos y gaseosas, de 2 a 5, para trabajar con múltiplos y llegar a la cantidad de gaseosas solicitadas. Esto se hizo tanto de manera gráfica como utilizando el planteamiento de proporciones. Veamos algunos ejemplos de solución.

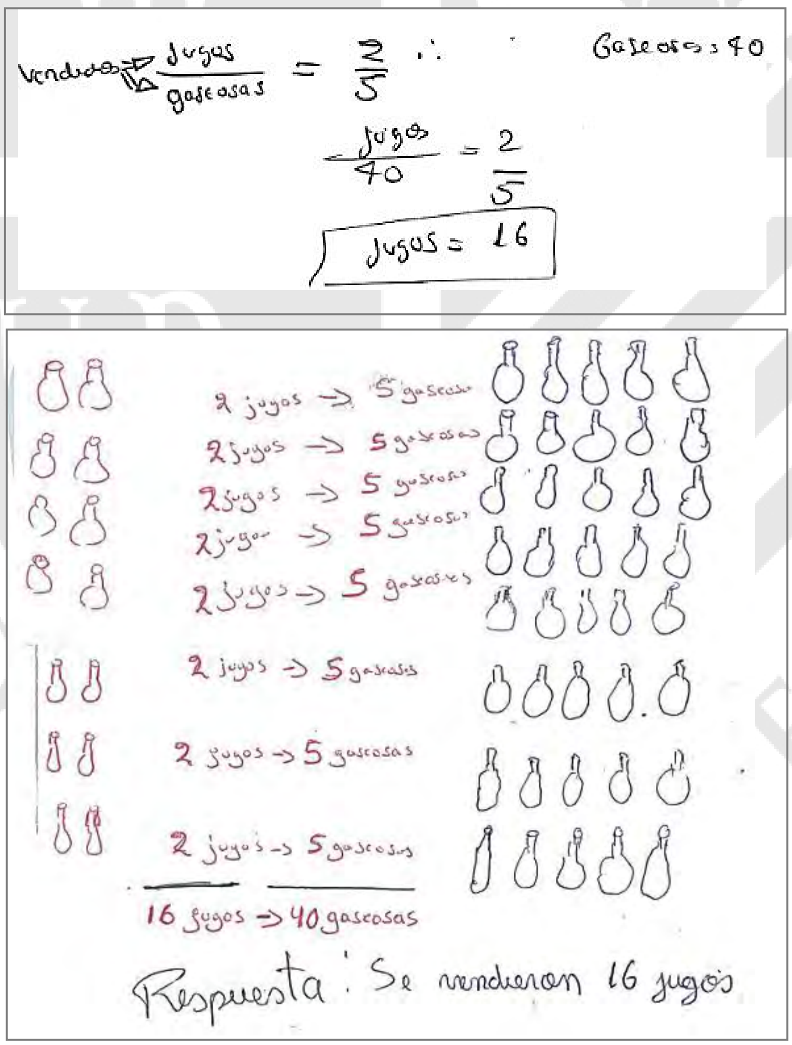



*Figura 61.* Ejemplos de respuestas correctas situación 6

- La naturaleza de esta tarea es muy distinta a todas las anteriores, pues no es reparto ni dividir un todo en partes iguales. Lo que estamos haciendo es comparar cantidades ya sean continuas o discretas y esta comparación se puede dar entre cantidades de una misma o diferente magnitud.
- En esta situación, el concepto de fracción se da en su significado como razón asociando esta interpretación a la relación parte-parte o conjunto a conjunto.
- Se afirma para esta situación que la cantidad de jugos es $\frac{2}{5}$ de la cantidad de gaseosas. Por lo tanto, para 40 gaseosas tenemos $\frac{2}{5}$ de 40 y nos da 16 jugos.
- La dificultad de este concepto es que es poco abordado en las escuelas o se trabaja de manera muy algorítmica.

Habiendo realizado el análisis de las tareas focalizando el concepto de fracción y sus diferentes significados que están involucrados en cada caso, pasamos a atender otro factor importante en esta conceptualización y es la representación de fracción.

#### 5.5.1.2. Representaciones de la fracción.

En reiterados momentos al sustentar los conceptos de fracción, se observó la importancia de modelar las fracciones a través de diversas representaciones que pueden ser con gráficos y diagramas, con lenguaje natural, con expresiones simbólicas o formales, entre otros, las que se usan para resolver las situaciones planteadas.

**Aspecto: Representación de la fracción**

| Estado Inicial | Percepción final | Dificultades |
|---|---|---|
| Predominó la representación gráfica de un rectángulo dividido en partes iguales, sin atender a la particularidad de ser un contexto continuo o discreto.<br><br>La unidad era dividida solo en partes congruentes entre sí.<br><br>La representación numérica $\frac{a}{b}$ fue para expresar la fracción con un único sentido “el todo dividido en b partes y tomo a partes de ella” | Representaron las fracciones tomando como unidad diferentes figuras para dividirlas en partes iguales así como conjunto de objetos para referirse a grupos.<br><br>Ampliaron la representación gráfica continua a una unidad dividida en partes equivalentes (igual área).<br><br>Utilizaron distintas representaciones numéricas como la fracción, el decimal o el porcentaje.<br><br>Dieron sentido a la expresión verbal como parte de la comprensión del concepto. | Representaban situaciones con material concreto que luego no podían expresar en forma simbólica o numérica o viceversa.<br><br>Expresan con material concreto o gráficamente fracciones donde no requieran el uso de fracciones equivalentes.<br><br>Pocos estudiantes dieron respuestas utilizando diferentes representaciones o estableciendo equivalencias entre sí, en su mayoría utilizaban una única forma en particular. |

Los estudiantes utilizaron diversos recursos concretos como frijoles, regletas de colores, tableros de 10 x10 de cartulina, figuras circulares de cartulina, etc. Elegían entre ellos los que les permitía representar cada situación planteada para ser resuelta.

*Figura 62.* Uso de material concreto.

Las representaciones gráficas de un todo continuo fue variando en su elaboración. Esto se aprecia cuando representan banderas rectangulares donde ¼ de la bandera es de color diferente. Las primeras representaciones gráficas eran solo en figuras rectangulares y divididas en partes iguales entre sí, es decir, partes congruentes (Figura 62). Luego, la representación gráfica tuvo divisiones atendiendo no solo a las formas iguales sino también que tengan superficies iguales (Figura 63). Finalmente, logran representar la fracción evidenciando la comprensión del concepto y la integración de significados (Figura 64).

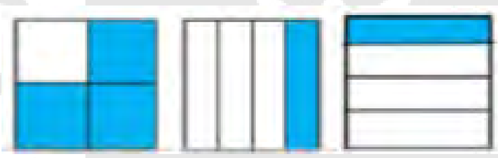


*Figura 63.* Representación gráfica de ¼ de color diferente

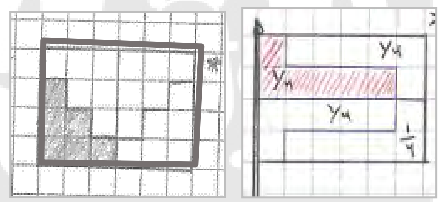


*Figura 64.* Representación gráfica de ¼ de color diferente

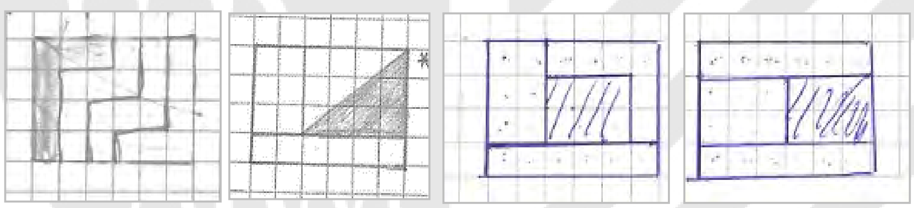


*Figura 65.* Representación gráfica de ¼ de color diferente

En el proceso de solución de una situación planteada se pudo apreciar cómo los estudiantes hacen uso de diferentes representaciones de la fracción y este va cambiando en la medida que sistematizan y generalizan su razonamiento. De ahí que inician representando con material concreto, luego pasan a la representación gráfica de lo manipulado y posteriormente llegan a la representación simbólica de la fracción y de las operaciones realizadas con ellas. En la figura 65 se observa este proceso en la representación de una situación parte-todo discreta. De la misma manera en la figura 66, en una situación de reparto continuo.

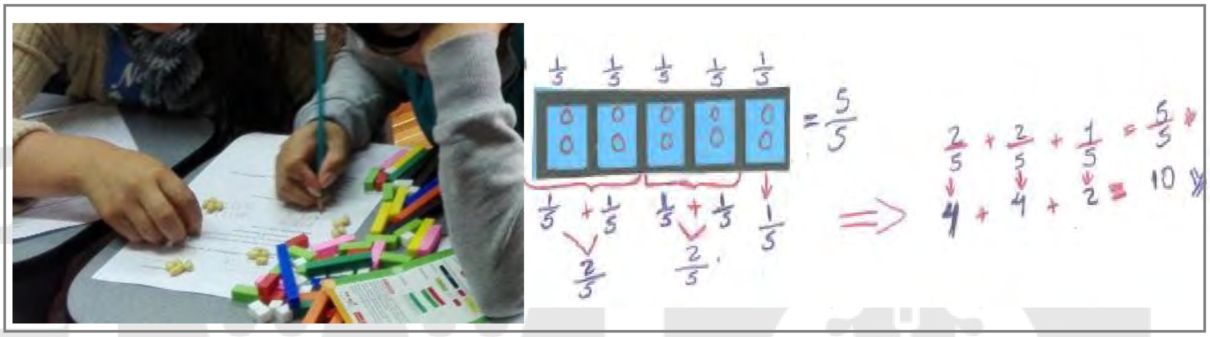


*Figura 66.* Diversas representaciones de una fracción

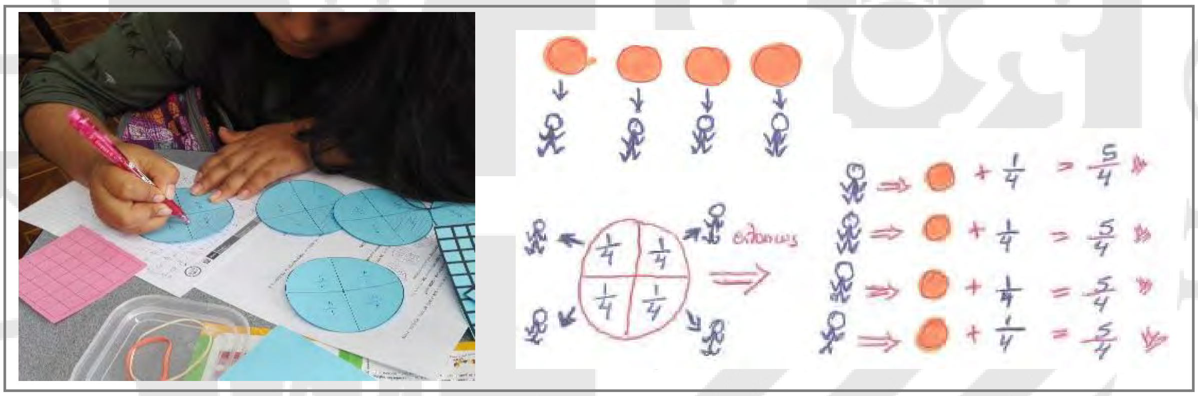


*Figura 67.* Diversas representaciones de una fracción

Cabe resaltar la dificultad que se presenta en este proceso.

- Algunos estudiantes logran resolver situaciones haciendo uso de material concreto pero no llegar a consolidar su procedimiento con representaciones simbólicas o formales, siendo difícil comunicar su pensamiento de solución.
- Otros estudiantes realizan algoritmos correctos que no llegan a representar ni explicar haciendo uso del material concreto ni en lenguaje usual. Esto evidencia sus procedimiento formales pero con poca comprensión de lo que hacen.

Algunos estudiantes no logran expresar con material concreto o gráficamente situaciones donde se requiera el uso de fracciones equivalentes o de divisiones y subdivisiones en una misma unidad. Esto se observa en la siguiente situación:

**Situación:** Andrés en su finca tiene una parcela de forma cuadrada, en 1/8 de ella tiene sembrado frijol, en 2/4 zanahoria y en el resto papa. ¿Qué porción de la parcela está sembrada de papa? Respondan gráfica, verbal y simbólicamente.

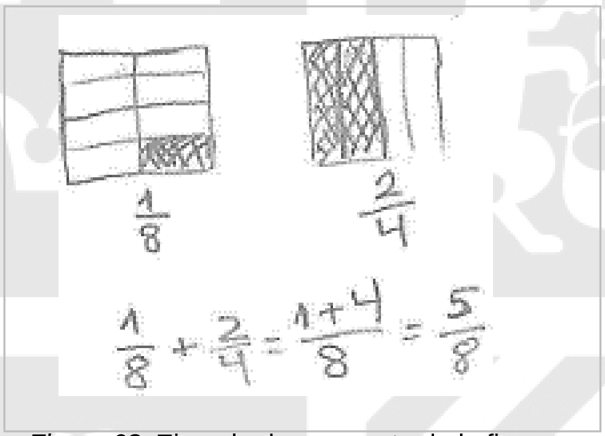



*Figura 68.* Ejemplo de respuesta de la finca.

Los estudiantes representaron gráficamente cada parte de la parcela de manera aislada, sin poder graficar ambas fracciones en una sola unidad. Lograron resolver la primera parte de manera simbólica juntando 1/8 y 2/4 en una adición mas no en la representación gráfica, sin poder inferir finalmente la parte que le quedaba sembrada de papa.

Los estudiantes pudieron establecer relaciones entre diferentes formas simbólicas de representar una cantidad, es decir equivalencias entre fracción, decimal y porcentaje. Por ejemplo, en la situación de Lacy Tawn, se dio un dato en 30 %, este fue trabajado en expresión decimal por algunos estudiantes y en expresión fraccionaria por otros, como se observa en la figura 69.

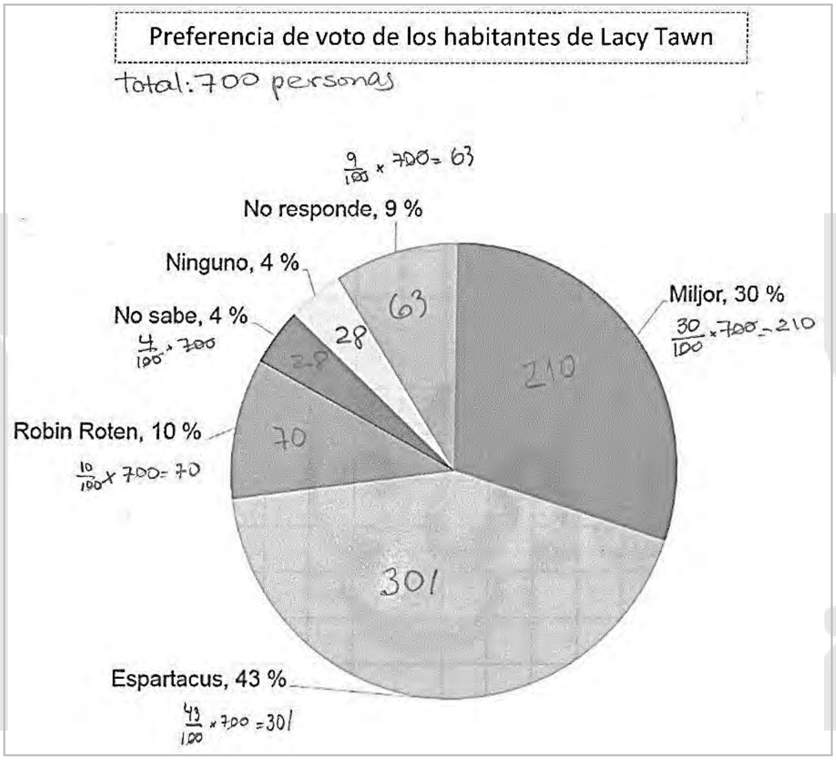



*Figura 69.* Ejemplo de respuesta Lacy Tawn.

Las representaciones tienen una importancia particular en la teoría de campos conceptuales. Son las diversas expresiones (lenguaje natural, material concreto, gráficos, sentencias formales, etc.) las que se usan para representar los invariantes operatorios, situaciones y procedimientos. De ahí que radica la necesidad de desarrollarlos como parte importante en la adquisición del concepto de fracción.

#### 5.5.1.3. Situaciones que dan sentido al concepto de fracción.

Las situaciones son elementos muy importantes en la teoría de campos conceptuales. Son ellas las permiten que los conceptos tomen sentido y se tornen significativo para las personas. Analizaremos las situaciones abordadas en el concepto de fracción.

.

**Aspecto: Situaciones que dan sentido al concepto**

| Estado Inicial | Percepción final | Dificultades |
|---|---|---|
| Entienden por fracción la escritura en forma de quebrado y por lo general es una fracción propia.<br><br>Abordar el tema de fracción es nombrar sus elementos, clasificarlas en propias e impropias y operar con ellos.<br><br>Se habla de fracción en situaciones desprovistas de contexto.<br><br>Situaciones de fracciones propuestas por el estudiante eran dadas por figuras aisladas o cantidades referenciales, como 1/3 del rectángulo, 2/5 del círculo o ¼ de 20 soles. | Propuesta de situaciones de contexto cercano, factible de ejemplificar y representar de varias formas.<br><br>Planteamiento de situaciones reales que cuestionan al estudiante, los moviliza en su pensamiento y buscan otras formas de representaciones generando procedimientos intuitivos, de estimación y no solo de cálculos estereotipados.<br><br>Generar espacios de discusión grupal donde argumenten a sus compañeros procedimientos y diferentes nociones aplicadas.<br>. | Situaciones contextualizadas de diferentes significados de la fracción, eran en gran parte, desconocido por el estudiante.<br><br>Frente a situaciones diferentes a las trabajadas, esperaban que se les explique y no iniciaban la exploración.<br><br>Se sentían muy inseguros en los procedimientos operativos con las fracciones, a lo que respondían "no me acuerdo".<br><br>Desconocimiento de algunos conceptos básico de matemática como porcentaje, decimales, mínimo común denominador, gráficos estadísticos, área volumen, etc. |

El aprendizaje de las fracciones en la escolaridad se inicia a través de la partición y el conteo sobre elementos gráficos por lo general, "parte pintada del total. Es necesario pensar en estrategias metodológicas que lleven al uso de diferentes materiales y la aplicación de variedad de contextos que permita integrar nociones previas y explorar significado de fracciones como proceso de adquisición de este concepto.

Por otro lado, es importante brindar situaciones que permitan abordar los diferentes significados de las fracciones con seguridad, iniciativa y variadas representaciones. Sabemos que los significados de fracción poco desarrollados en la escolaridad son los de medida y los de razón. Inclusive el de cociente, basado en el reparto se asocia con los decimales mas no con su sentido en fracciones.

Presentaremos los materiales de trabajo que se usaron para la representación de las situaciones propuestas. Asimismo, se mencionan algunas situaciones que despertaron interés en los estudiantes y al mismo tiempo ayudaron en la reflexión y desarrollo de otros significados de fracción. Usaron regletas para situaciones de medida, frijoles para situaciones de perlas del collar, tablero de 10x10 de cartulina para la situación de horneado de 250 pasteles, los círculos de cartulina para el reparto de las tortas, etc. (Figura 70). El manejo de cada uno de estos materiales contribuyó a la comprensión y exploración de los distintos significados de fracción. Cabe resaltar que son situaciones cercanas, conocidas, y motivadoras para los estudiantes, como dibujar a escala, interpretar una gráfica estadística o realizar un concurso de diseño de banderas (Figura 71).


*Figura 70.* Uso de material concreto para diferentes situaciones.

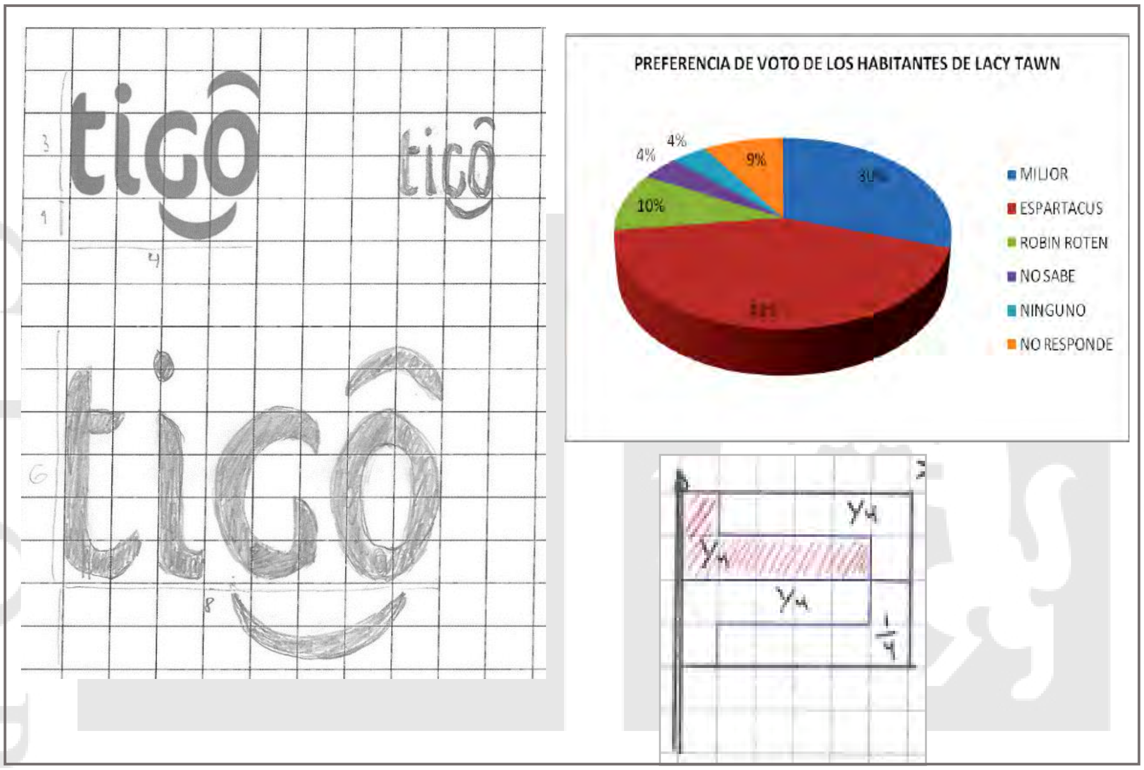



*Figura 71.* Diversas situaciones presentadas.

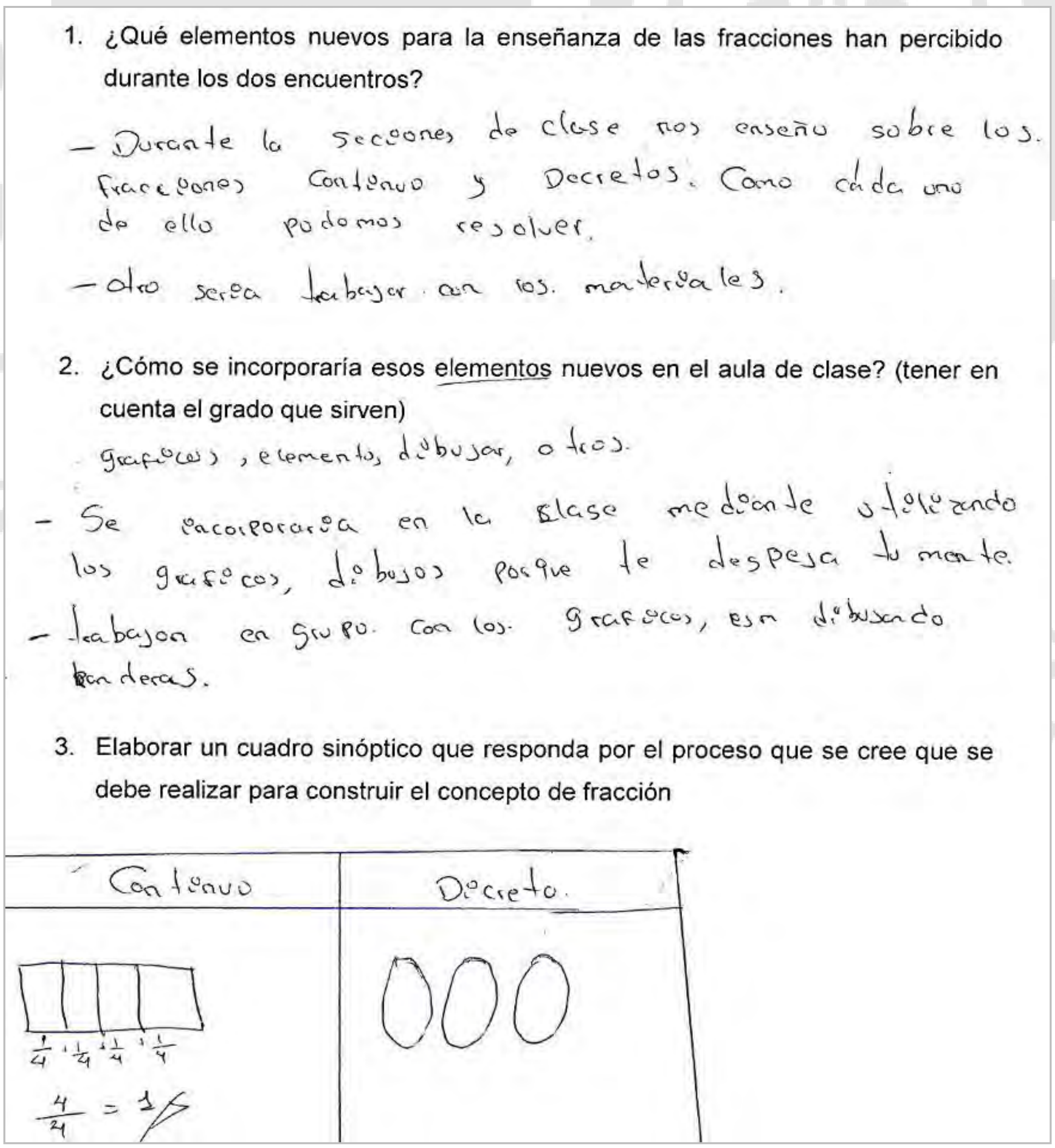
Consideramos también trabajos grupales, situaciones que permitan explicar, justificar y demostrar los procesos de trabajo seguido por los estudiantes, así como interpretar otras propuestas de solución, las que son evaluadas antes de presentar la solución final.

*Figura 72.* Situaciones trabajadas en equipo.

### 5.5.2. Análisis desde las reflexiones de los docentes.

Esta fase se dio en los 20 últimos minutos de la tercera sesión, momento en que los estudiantes respondieron una encuesta de manera grupal y también se compartió algunas opiniones de manera oral en la plenaria. Esto constituyó la tercera fase denominada Evaluación.

Presentamos a continuación algunas respuestas brindadas por los estudiantes. Asimismo, expresamos algunas de las opiniones emitidas por ellos en esta etapa de evaluación y cierre de los talleres.



1. ¿Qué elementos nuevos para la enseñanza de las fracciones han percibido durante los dos encuentros?

- Durante la seciones de clase nos enseño sobre los fracciones Contenuo y Decretos. Como cada uno de ello podemos resolver.
- otro seria trabajar con los materiales.

2. ¿Cómo se incorporaría esos elementos nuevos en el aula de clase? (tener en cuenta el grado que sirven)

graficos, elementos, dibujar, otros.

- Se incorporaria en la clase mediante utilizando los graficos, dibujos porque te despeja tu mente.
- trabajan en grupo. Con los graficos, esn dibujando banderas.

3. Elaborar un cuadro sinóptico que responda por el proceso que se cree que se debe realizar para construir el concepto de fracción

| Contenuo | Decreto. |
|---|---|
| $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ <br> $\frac{4}{4}=1$ | |

Conformar grupos de trabajo de 2 o 3 integrantes por grupo.

1. ¿Qué elementos nuevos para la enseñanza de las fracciones han percibido durante los dos encuentros?

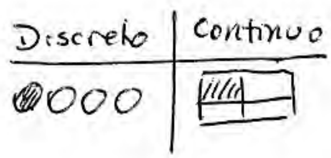
- Fue nuevo para mí separar la fracción en partes de distintas formas pero iguales en área.
- Otro fue utilizar los diferentes materiales.

2. ¿Cómo se incorporaría esos elementos nuevos en el aula de clase? (tener en cuenta el grado que sirven)

Trabajar con materiales ayuda a darse cuenta y razonar más sobre los ejercicios.

Trabajar en grupo ayuda a entender.

3. Elaborar un cuadro sinóptico que responda por el proceso que se cree que se debe realizar para construir el concepto de fracción




$\boxed{\text{Situación real}}$

↓

representarlo con material

↓

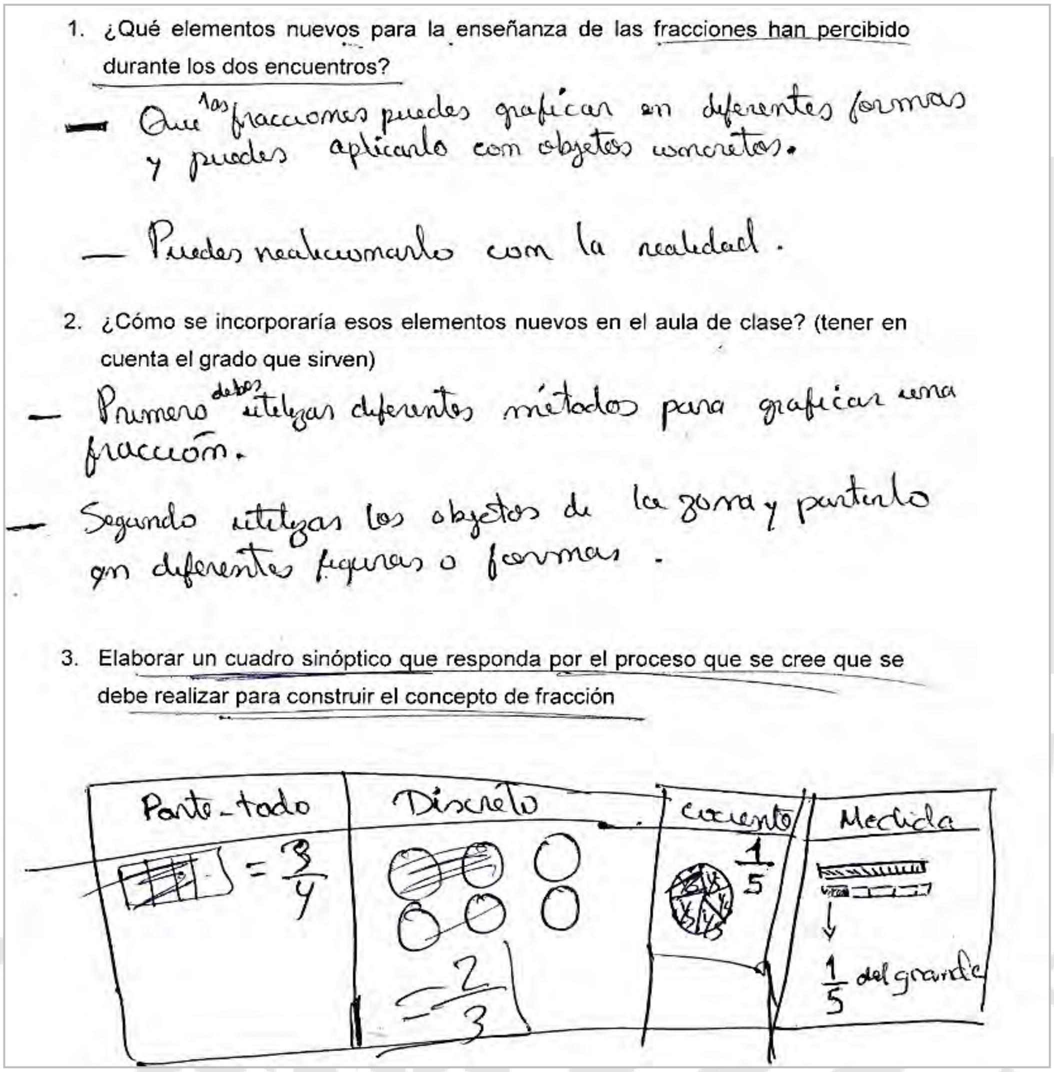
representarlo con dibujo

↓

representalo con números.

↓

$\boxed{\text{solución}}$


1. ¿Qué elementos nuevos para la enseñanza de las fracciones han percibido durante los dos encuentros?

— Que las fracciones puedes graficar en diferentes formas y puedes aplicarlo con objetos concretos.

— Puedes relacionarlo con la realidad.

2. ¿Cómo se incorporaría esos elementos nuevos en el aula de clase? (tener en cuenta el grado que sirven)

— Primero debes utilizar diferentes métodos para graficar una fracción.

— Segundo utilizar los objetos de la zona y partirlo en diferentes figuras o formas.

3. Elaborar un cuadro sinóptico que responda por el proceso que se cree que se debe realizar para construir el concepto de fracción

| Parte_todo | Discreto | cociente | Medida |
|---|---|---|---|
| $= \frac{3}{4}$ | $= \frac{2}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ del grande |

*Figura 73.* Reflexiones de los docentes en la fase de evaluación.

De manera general, observamos que los estudiantes manifiestan los elementos nuevos que han aprendido sobre las fracciones y que los tomarían en cuenta para sus futuras clases. Ellos son los siguientes:

- Que las fracciones tienen distintas concepciones y lo más destacable está en la concepción de parte-todo continuo y discreto. Esto significó romper su esquema de un todo como terreno, torta, pizza, jardín o simplemente figura geométrica divida en partes iguales. También se trabaja las fracciones en un conjunto de elementos, de objetos que se agrupan y cada uno se mantiene completo, compacto.

- Que usar las fracciones en situaciones cercanas, familiares, ayuda a entenderlos mejor, le da sentido a la cantidad que menciona. Se refieren a la fracción en sus significados de medida, de razón, de operador y no quedarse solo en el significado parte-todo.
- Que trabajar fracciones no solo es con lápiz y papel, se cuenta con diversos materiales que ayudan a la comprensión y representación de las mismas en las tareas propuestas. Las diversas representaciones, como indicaron en alguna parte, «despejan tu mente», es decir, favorecen la comprensión.
- Que aprender las fracciones sin entenderlas solo permite resolver ejercicios y operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones siguiendo reglas, pero no ayuda a resolver problemas propuestos.
- Que trabajar en grupo ayuda a descubrir cosas nuevas: el intercambio de opiniones, la propuesta de ideas ayuda a comprender mejor el concepto de fracción para así poder resolver problemas.

Cabe señalar que en las sesiones se observó un progreso en la actitud de los estudiantes frente a las tareas. En un inicio estaban algo tímidos, reservados y muy individuales en su trabajo y, conforme interactuaban entre ellos y manipulaban los distintos materiales, mostraban mayor entusiasmo, mejor disposición y aportaban más ideas y propuestas de solución.

Asimismo, el desarrollo de las actividades generaba en ellos la necesidad de explicar lo que hacían a sus compañeros, expresar su forma de pensar, justificar sus procedimientos seguidos, todo lo cual permitió diferentes tipos de representaciones.

# CAPÍTULO VI

## CONSIDERACIONES FINALES

Siendo el concepto de fracción una noción muy importante en el aprendizaje de la matemática y en la vida misma, se observa que los docentes en formación, como este grupo evaluado, tienen serias dificultades en la comprensión de estas nociones. Con la información recogida en la evaluación de la fase diagnóstica, se pudo evidenciar que los docentes al inicio:

- Solo mostraban el leer y escribir numéricamente una fracción propia o impropia sin contexto alguno.
- Representaban gráficamente algunas fracciones propias y lo hacían solo de manera parte-todo continuo.
- No manejaban fracciones equivalentes, no atendían al «todo» en una expresión y solo usaban una representación de la fracción, generalmente la numérica.

Con las actividades propuestas en las sesiones planteadas en los instrumentos de la fase de ejecución, se pudo observar que:

- Los estudiantes valoraron la importancia de la situación en la tarea para favorecer la comprensión del concepto de fracción. Así, trabajar los diferentes significados de la fracción permitió profundizar en el concepto mismo y en sus diferentes representaciones.
- Que, trabajar de manera comprensible, con diferentes materiales y representaciones y en diferentes contextos, hace posible relacionar estos conceptos de fracción con otras nociones matemáticas y lograr así aprendizajes más sólidos.

- Cobró significado para los estudiantes el trabajar los distintos conceptos de fracción que responden a diversas situaciones de uso y de representación, permitiendo tener mayores recursos y estrategias para abordar la solución a las tareas propuestas.
- Es de gran importancia la comprensión del concepto de fracción, más allá de seguir mecánicamente procesos o reglas memorizadas.
- Son las situaciones las que abren el camino para establecer relaciones entre los datos, realizar inducciones y deducciones, lograr generalizaciones y diversas representaciones de lo que se piensa y se trabaja, favoreciendo el razonamiento y la comunicación matemática.
- El desempeño del grupo en el proceso de trabajo fue progresivo, cada vez mostraron mayor interés, motivación para aprender, para enfrentar la tarea y tuvieron una mejor relación e intercambio de opiniones.

A manera de cierre, este trabajo promovió el desarrollo intelectual de los estudiantes, el razonamiento y la comunicación, elementos importantes para la construcción de conceptos matemáticos. Por ello, proponemos partir de situaciones cercanas y simples que motiven a los estudiantes a explorar, a evocar conocimientos previos sobre los cuales puedan construir nuevos aprendizajes. De esta manera, generamos situaciones de aprendizaje que responden al enfoque de resolución de problemas que se propugna en nuestro currículo.

Como indica Vergnaud (1990), un concepto está conformado por tres aspectos: las situaciones que dan sentido (reparto de tortas, medida de regletas, comparación de tamaños en el logo), los conceptos que son el conjunto de invariantes, propiedades y relaciones (significados de medida, operador, razón, cociente, parte-todo vinculado a situaciones), y las representaciones (lenguaje oral, gráficos, sentencias formales, diagramas, material concreto). Con todo lo expresado, consideramos que se ha cumplido con los objetivos planteados en esta investigación.

# CAPÍTULO VII

## SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Según las evidencias encontradas en este estudio, se ha podido observar la dificultad que tienen los estudiantes en formación de Educación Primaria con respecto a la comprensión de los conceptos de fracción. Es debido al desconocimiento de los distintos significados de la fracción o quizás al trabajo concentrado solo en uno de los significados que los estudiantes no logran la comprensión cabal del concepto, no interpretan las diferentes representaciones y por lo mismo, tengan dificultad para resolver algunas situaciones problemáticas.

Es por ello que consideramos que este trabajo puede complementarse con otras investigaciones, tales como:

- Realizar estudios que permitan investigar el nivel de comprensión de conceptos con respecto a la fracción que tienen los docentes en servicio como también los docentes en formación para, a partir de ello, dar propuestas que contribuyan en la formación inicial y continua de estos. Dichas propuestas deben considerar el concepto de fracción tanto desde un conocimiento pedagógico como disciplinar.

- Realizar estudios que permitan desarrollar propuestas didácticas de uso de diversas representaciones en los diferentes significados de fracción que permitan un mejor aprendizaje en los estudiantes y una mayor comprensión del concepto. Se busca proponer estrategias didácticas a los docentes que permitan trabajar con material concreto, diversas representaciones, actividades grupales para que, de esta manera, construyan el concepto de fracción desde sus distintos significados tomando como referencia la Teoría de Campos Conceptuales.

- Realizar estudios que permitan brindar propuestas de trabajo en aula basadas en situaciones que estimulen el establecer relaciones integrando nociones matemáticas entre sí, donde el docente tenga una acción mediadora que lleve a un cambio de estado cognitivo frente a situaciones nuevas y retadoras y que contemplen actividades grupales en el proceso de construcción de aprendizajes.

# BIBLIOGRAFÍA


- Barrantes, H. (2006). La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (2). Recuperado el 16 de febrero de 2016 de: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6888/6574

- Cardona, G., Maite, M. y Meneses, J. (2014). The Theory of Conceptual Fields: an exploration as a reference in science teacher training [La Teoría de los Campos Conceptuales: una exploración como referente en la formación de profesores de ciencias]. *Investigações em Ensino de Ciências*, *19*(3), 553-563. Recuperado el 16 de febrero de 2016 de:http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID428/v19_n3_a2014.pdf

- Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el texto escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado el 16 de febrero de 2016 de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1547/CARRILLO_YALAN_MILAGROS_ORGANIZACION_MATEMATICA.pdf?sequence=1

- Castro, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial* (tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de: http://www.ugr.es/~lrico/MastDDM_files/Elena_Castro.pdf

- Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de educación primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 285-311). Madrid: Síntesis.

- D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática.* Bogotá: Magisterio.

- D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Didáctica Magisterio.

- De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996, julio-diciembre) *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(2), 268-282. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14000202

- Escolano, R. (2001). Enseñanza del Número Racional Positivo en Educación *Primaria: Un estudio desde el Modelo Cociente*. Ponencia presentada en el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Quito. Recuperado el 3 de agosto de 2016 de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/617790.pdf

- Escolano, R. y Gairín, S. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN,* 17-25. Recuperado el 5 de agosto de 2016 de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/1/Union_001_006.pdf

- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Didáctica Magisterio.

- Fandiño, M. (2011). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la Matemática*. Bogotá: Didáctica Magisterio.

- Ferreira, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: http://www.ime.usp.br/~iole/significados%20da%20fra%E7%E3o.pdf

- Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria* (tesis de maestría). Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México. Recuperado el 10 de marzo de 2016 de: http://docplayer.es/11684965-Tesis-que-para-obtener-el-grado-de-maestria-en-ciencias-en-matematica-educativa-presenta-rebeca-flores-garcia.html

- Gallardo, J., González, J. y Quispe, W. (2008). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 355-382. Recuperado el 24 de marzo de 2016 de: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n3/v11n3a3.pdf

- García, I., Cabañas, G. (2013). El concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior. En Flores R. (Ed.). (2013). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 213-222. México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3795/1/GarciaElconceptoALME2013.pdf

- Godino, J., Font, V., Konic, P. y Wilhemi, M. (2009). En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado el 10 de abril de 2016 de: http://thales.cica.es/granada/

- Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 12 de marzo de 2016 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf

- Hurtado, M. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el sexto grado* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado el 5 de marzo de 2016 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf

- Kilpatrick, J., Gómez, P., Rico, L. (1998) *Educación Matemática. Errores y Dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 5 de marzo de 2016 de: http://core.ac.uk/download/pdf/12341271.pdf

- León, G. (2011) *Unidad Didáctica: Fracciones* (trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado el 24 de marzo de 2016 de: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

- Matute, K. (2010). *Concepciones Matemáticas en los estudiantes de Séptimo Grado de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones*. Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: http://www.cervantesvirtual.com/descargaPdf/concepciones-matematicas-en-los-estudiantes-de-septimo-grado-de-la-escuela-normal-mixta-pedro-nufio-acerca-de-las-fracciones-y-sus-diferentes-interpretaciones/

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2005a). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe Pedagógico de resultados - Secundaria*. Recuperado el 18 de marzo de 2016 de: http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2005b). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe Pedagógico de resultados - Primaria*.

Recuperado el 18 de marzo de 2016 de: http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaP2_6.pdf

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2009). *Diseño Curricular Nacional.* Lima: Autor.

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2015). *Rutas de Aprendizaje - Matemática. Versión 2015.* Lima: Autor.

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2016a). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.° grado de secundaria.* Lima: Autor. Recuperado el 3 de junio de 2016 en: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2016b). *Informe de Resultados de la Evaluación Muestral (EM - 2013) Sexto grado de primaria.* Documento en trabajo. Lima: Autor.

- Ministerio de Educación [Minedu]. (2016c). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-primaria-16-marzo.pdf

- Morales, R. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, México. Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/865/1/Informe%20final%20Raul%20Morales%20con%20toda%20la%20bibliografia%20diembre%20toda%20completa.pdf

- Moreira, M. (2002). *Vergnaud's conceptual fields theory, science education, and research in this area* [La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área] (I. Iglesias, trad.). Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Recuperado el 16 de abril de 2016 en: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000a). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000b). *Resumen Ejecutivo. Principios y estándares para la educación matemática.* Recuperado el 14 de marzo de 2014 de: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20_Spanish_e-Final.pdf.

- Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta Didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática* XI (pp. 209-218). Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2697033.pdf

- Quispe, W. (2011). *La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales* (tesis de doctorado). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú. Recuperado el 14 de noviembre de 2015 de: http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf

- Rico, L. (2006). *La Competencia Matemática en PISA*. Recuperado el 3 de marzo de 2016 de: http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF

- Rico, L. (s.f.). Errores del Aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Gómez P. y Rico, L. (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de: http://cumbia.ath.cx:591/pna/archivos/ricol95-100.pdf

- Ríos, Y. (2011, enero-abril). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Omnia*, *17*(1), 11-33. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de: http://www.redalyc.org/pdf/737/73718406002.pdf

- Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado el 15 de marzo de 2016 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

- Sánchez, M. (2001). Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. En M. Chamorro (Ed.), *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 11-24). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

- Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales (J. D. Godino, trad.). *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2), 133-170. Recuperado el 18 de febrero de 2016 de: http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf

- Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? [¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?] (C. Caballero, trad.). *Investigações em Ensino de Ciências, 12*(2), 285-302. Recuperado el 18 de febrero de 2016 de: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n2_a2007.pdf