ANEXOS

ANEXO N.° 1: SYLABUS DE MATEMÁTICA I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERIA ELECTRICA

SYLLABUS

MA-113 MATEMÁTICA I

ESPECIALIDAD	: ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA	**CICLO**	: PRIMERO
CRÉDITOS	: 04	**AÑO**	: PRIMERO
HORAS/SEMAN	T6, P2	**REGIMEN**	: OBLIGATORIO
PRE-REQUISITO	: NINGUNO	**EVALUACIÓN**	: TIPO G

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante los primeros elementos del análisis matemático que le permitan resolver los problemas relativos a funciones de una variable real.

RESUMEN

Sucesiones, límites y continuidad. Derivada de una función. Representación paramétrica de curvas. Coordenadas polares. Aplicaciones de la derivada. Series. Serie de Taylor (una variable). Funciones transcendentes.

CONTENIDO

Capítulo 1.- SUCESIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Sucesión. Límite. Cálculo con sucesiones convergentes. Principios de la teoría de convergencia. Topología de R: vecindades, punto de acumulación. Límite de una función en un punto: interpretación, teoremas. Forma indeterminada 0/0. Límites laterales. Límites trigonométricos. Límites infinitos y al infinito. Forma indeterminadas: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ Comportamiento asintótico de una función. Asíntotas. Continuidad de una función sobre un punto, sobre un conjunto acotado: teoremas. Continuidad lateral. Discontinuidades. Funciones acotadas: ínfimo y supremo. Función inversa de una función inyectiva continua sobre

[a; b].

Capítulo 2.- DERIVADA DE UNA FUNCION.

La derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Consecuencias. Las rectas tangente y normal a la gráfica de una función. Velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo. Derivadas laterales. Diferenciabilidad y continuidad: teoremas. Derivadas de funciones elementales. Tablas. Derivadas de la suma, producto y cociente de funciones. Derivada de la función compuesta: regla de la cadena. Diferenciales: aproximaciones. Derivadas de orden superior.

Capítulo 3.- APLICACIONES DE LA DERIVADA.

La derivada como razón instantánea de cambio. Problemas de aplicación. Funciones crecientes, decrecientes. Aplicaciones. Valores extremos. Puntos críticos. Máximos y Mínimos. Aplicaciones. Criterios de la primera y segunda derivada para extremos relativos. Problemas de aplicación

Capítulo 4 CONCAVIDAD GRAFICA Y DERIVACION INVERSA

Concavidad y puntos de inflexión de la gráfica de una función. Teoremas. Aplicaciones en el trazado de la gráfica de una función: en coordenadas cartesianas. Gráficas en coordenadas La regla de L' Hôspital para el cálculo de formas indeterminadas. Teorema sobre la derivada de la inversa de una función diferenciable sobre un intervalo. Derivadas de las inversas de algunas funciones: trigonométricas, algebraicas, etc.

Capítulo 5 REPRESENTACION PARAMETRICA DE CURVAS Y

COORDENADAS POLARES

Representación paramétrica de curvas. Derivadas paramétricas. Interpretación Grafica en paramétricas. Coordenadas polares: relaciones y funciones en polares. Velocidad de variación del radio polar. Gráficas en coordenadas polares

Capítulo 6.- SERIES. SERIES DE TAYLOR.

Series numéricas: definiciones. Convergencia. Series geométricas. Pruebas de convergencia: series de términos positivos, series de términos de signo variable. Criterios de D'Alambert y de Cauchy. Series absolutamente convergentes. Series que no convergen absolutamente. Teorema de Riemann. Transformación de Abel. Criterios de convergencia de Dirichlet y de Abel. El teorema de Taylor. Fórmulas para el residuo. La fórmula de McClaurin. Aplicaciones. Cálculo de residuos. Introducción a series funcionales. Convergencia uniforme. Ejemplos de serie de potencias.

Capítulo 7.- FUNCIONES TRASCENDENTES.

Función exponencial y logaritmo. Funciones hiperbólicas: definición y propiedades. Derivadas. Funciones hiperbólicas inversas y sus derivadas. Aplicaciones. Fenómenos de crecimiento y decaimiento. Fenómenos periódicos. Problemas de Cauchy: $du/dt = at$, $u(o) = u_0$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1.- HASSER-LASALLE-SULLIVAN, "INTRODUCCIÒN AL ANALISIS", EDITORIAL TRILLAS

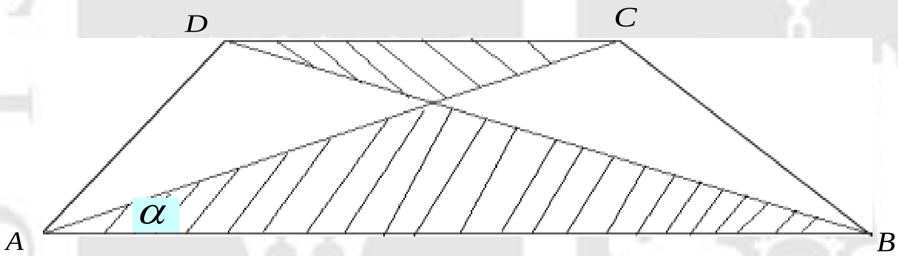
2.- HASSER-LASALLE-SULLIVAN, "ANÁLISIS MATEMÁTICO II", EDITORIAL TRILLAS.

3.- LOUIS LEITHOLD, "EL CÁLCULO", COOPERACIÓN EDITORA Y PERIODÍSTICA S.A. DE C.V. MEXICO.

4.- CÉSAR SAAL, "INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO", VOL. I-II.

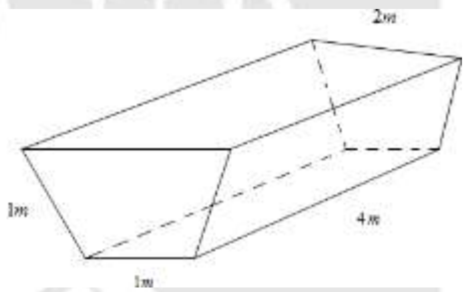
ANEXO N.° 2: PRUEBA DE MATEMÁTICA I PROCEDIMENTAL

1- En el trapecio de la figura AB=a y AC=d. Calcular la longitud de CD para que la suma de las áreas de los triángulos sombreados sea mínima, sabiendo que α es constante.



(4 puntos)

2- Un abrevadero con extremos verticales en forma de trapecios tiene dimensiones que se muestran en la figura. Si se vierte agua a razón constante de 0.5 m^3/s ¿Con que rapidez está subiendo el nivel del agua cuando está a 0.25 m de fondo?



(4 puntos)

3- Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150 m, sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20 m /sg. Hallar la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros. (4 puntos)

4- Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área de lados paralelos a los ejes coordenados, que puede inscribirse en la región encerrada por las parábolas $3y = 12 - x^2$ y $6y = x^2 - 12$ (4 puntos)

5- Si el producto dos números positivos es 192 ¿Que números hacen mínima la suma del primero más tres veces el segundo? (4 puntos)

ANEXO N.° 3: RUBRICA PRUEBA PROCEDIMENTAL

PROBLEMA	CRITERIO	PUNTAJE
1	RESPUESTA EN BLANCO O DESLIGADA DEL PROBLEMA,	0 PUNTOS
	PLANTEA MAL EL PROBLEMA PERO DERIVA BIEN	1 PUNTO
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA Y APLICA EL CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA PERO DERIVA MAL	2 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA APLICANDO CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN PERO FALLA EN LA RESPUESTA	3 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA APLICANDO CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN Y LLEGA A LA RESPUESTA	4 PUNTOS
2	RESPUESTA EN BLANCO O DESLIGADA DEL PROBLEMA,	0 PUNTOS
	PLANTEA MAL EL PROBLEMA, PERO LO ILUSTRA PONIEDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DEL PROBLEMA, DERIVA IMPLICITAMENTE MAL	1 PUNTO
	PLANTEA EL PROBLEMA PERO LO ILUSTRA PONIEDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DEL PROBLEMA, DERIVA IMPLICITAMENTE BIEN	2 PUNTOS
	PLANTEA BIEN PROBLEMA LO ILUSTRA PONIEDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DEL PROBLEMA,DERIVA IMPLICITAMENTE BIEN PERO FALLA EN LA RESPUESTA	3 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA PERO LO ILUSTRA PONIEDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DEL PROBLEMA, DERIVA IMPLICITAMENTE BIEN Y LLEGA A LA RESPUESTA	4 PUNTOS
3	RESPUESTA EN BLANCO O DESLIGADA DEL PROBLEMA	0 PUNTOS
	PLANTEA MAL EL PROBLEMA PERO LO ILUSTRA PONIENDO LOS DATOS EN EL GRAFICO	1 PUNTO

	PLANTEA EL PROBLEMA, PERO LO ILUSTRA PONIENDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DEL PROBLEMA PERO DERIVA IMPLICITAMENTE BIEN	2 PUNTOS
	PLANTEA BIEN PROBLEMA, LO ILUSTRA PONIENDO LOS DATOS EN EL GRAFICO DERIVA IMPLICITAMENTE, BIEN PERO FALLA EN LA RESPUESTA	3 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA LO ILUSTRA PONIENDO LOS DATOS EN EL GRAFICO, DERIVA IMPLICITAMENTE BIEN Y LLEGA A LA RESPUESTA	4 PUNTOS
4	RESPUESTA EN BLANCO O DESLIGADA DEL PROBLEMA,	0 PUNTOS
	PLANTEA MAL EL PROBLEMA, LO ILUSTRA CON UN GRAFICO PERO DERIVA MAL	1 PUNTO
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA, LO ILUSTRA CON UN GRAFICO, APLICA EL CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA PERO DERIVA MAL	2 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA LO ILUSTRA CON UN GRAFICO APLICA CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN PERO FALLA EN LA RESPUESTA	3 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA LO ILUSTRA CON UN GRAFICO, APLICA CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN Y LLEGA A LA RESPUESTA	4 PUNTOS
5	RESPUESTA EN BLANCO O DESLIGADA DEL PROBLEMA	0 PUNTOS
	PLANTEA MAL EL PROBLEMA, PERO DERIVA BIEN	1 PUNTO
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA Y APLICA EL CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, PERO DERIVA MAL	2 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA APLICANDO CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN PERO FALLA EN LA RESPUESTA	3 PUNTOS
	PLANTEA BIEN EL PROBLEMA APLICANDO CRITERIO DE LA 1RA O 2DA DERIVADA, DERIVA BIEN Y LLEGA A LA RESPUESTA	4 PUNTOS

ANEXO N.° 4: PRUEBA DE MATEMÁTICA I CONCEPTUAL

1- Defina el concepto de Razón de Cambio para funciones
f: R →R (2 puntos)

2- Defina el máximo y mínimo relativo de una función
f: R →R (1 punto)

3- Según el criterio de la primera derivada para funciones
f: R →R cuando ocurre el máximo relativo de f. (3 puntos)

3- Según el criterio de la primera derivada para funciones

f: R →R cuando ocurre el mínimo relativo de f. (3 puntos)

5-El criterio de la segunda derivada para hallar extremos de funciones
f: R →R es válido para funciones donde la derivada en el punto existe. Justifique. (2 puntos)

6 – Sea f : R → R una funcion real de variable real

Diga la verdad o falsedad de la siguiente proposicion :

$si \quad f^{!}_{(0)} = 0 \;\Rightarrow\;$ existe maximo relativo . Justifique . (3 puntos)

7- Diga la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:
a) La Razón de Cambio para funciones f: R →R solo se puede dar con respecto a la variable tiempo. Justifique. (2 puntos)

b) Existe un punto crítico donde la derivada existe. Justifique. (2 puntos)

c) La Razón de Cambio para funciones f: R →R es una velocidad media. Justifique. (2 puntos)

ANEXO N.° 5: RUBRICA PARA LA PRUEBA CONCEPTUAL

PREGUNTA	CRITERIO	PUNTAJE
1	DEFINE DE MANERA IMPRECISA, INCORRECTA O PARCIAL EL CONCEPTO DE RAZÓN DE CAMBIO	0 puntos
	DEFINE DE MANERA TEXTUAL PRECISA, CORRECTA EL CONCEPTO DE RAZÓN DE CAMBIO	2 puntos
2	DEFINE DE MANERA IMPRECISA, INCORRECTA O PARCIAL EL CONCEPTO DE MAXIMO Y MINIMO O RESPUESTA EN BLANCO	0 puntos
	DEFINE CORECTAMENTE EL CONCEPTO DE MÁXIMO PERO DEFINE INCORRECTAMENTE EL CONCEPTO DE MINIMO O VICEVERSA	0.5 puntos
	DEFINE CORRECTAMENTE EL CONCEPTO DE MÁXIMO Y MINIMO	1 punto
3	RESPUESTA IMPRECISA O INCORRECTA .	0 puntos
	RESPONDE CORRECTAMENTE CUANDO OCURRE EL MÁXIMO RELATIVO DE f	3 puntos

4	RESPUESTA IMPRECISA O INCORRECTA	0 puntos
	RESPONDE CORRECTAMENTE CUANDO OCURRE EL MINIMO RELATIVO DE f	3 puntos
5	RESPUESTA IMPRECISA O INCORRECTA	0 puntos
	RESPUESTA CORRECTA	2 puntos
6	RESPUESTA IMPRECISA O INCORRECTA	0 puntos
	SEÑALA QUE LA PROPOSICIÓN ES FALSA Y DA UN CONTRAEJEMPLO GRÁFICO	1 puntos
	SEÑALA QUE LA PROPOSICIÓN ES FALSA Y DA UN CONTRAEJEMPLO ANALÍTICO PARA JUSTIFICAR	2 puntos
	SEÑALA QUE LA PROPOSICIÓN ES FALSA Y DA UN CONTRAEJEMPLO ANALÍTICO Y GRAFICA LA FUNCIÓN	3 puntos
7 a	RESPUESTA IMPRECISA O RESPUESTA INCORRECTA	0 puntos
	RESPUESTA CORRECTA PERO NO DA UN EJEMPLO	1 punto

	RESPUESTA CORRECTA PERO DA UN EJEMPLO	2 puntos
7 b	RESPUESTA IMPRECISA O RESPUESTA INCORRECTA	0 puntos
	RESPUESTA CORRECTA Y JUSTIFICA	2 puntos
7c	RESPUESTA IMPRECISA O INCORRECTA	0 puntos
	RESPUESTA CORRECTA PERO JUSTIFICA PARCIALMENTE	1 punto
	RESPUESTA CORRECTA Y JUSTIFICA	2 puntos

ANEXO N.° 6: TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA SCIENTIA ET LABOR LIMA 1876 PERU

MATEMATICA I

APLICACIÓN DE LA METODOLOGIA ABP

TEMA: RAZON DE CAMBIO

- HUAMANYAURI PEREZ, JHOSTIN
- MONFORTE HERRERA ,RUBEN
- ORBEGOZO CHAVEZ, PABLO
- TICLAVILCA CAMPOS , SHARON
- ZEVALOOS TORRES , RAUL

PROFESOR: ERQUIZIO ESPINAL, EDUARDO

-1-

APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA ABP

Plan de Razón de Cambio

OBJETIVO:

Aplicar la derivación implícita para resolver problemas de razón de cambio

PROBLEMA:

En la cuadra 8 de la avenida Sueñas se presenta un punto de cruce a la via de ferrocarril con la avenida mencionada bajo un ángulo de 60°.

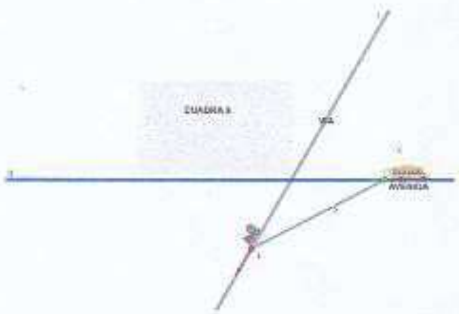
En cierto instante se observa que una locomotora que dista 120 metros del punto de cruce y se está alejando con una rapidez de 60 km/h, un camino dista del cruce 120m mientras que un ómnibus se acerca con un rapidez de 60 km/h. con que rapidez varia la distancia entre ellos.

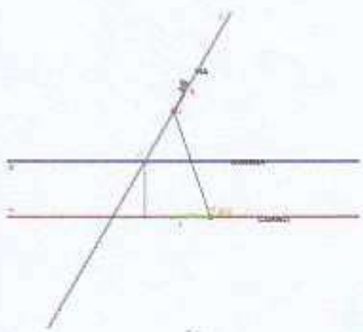
PASOS ABP

- ***Paso 1:*** Leer y analizar el escenario del problema

  Cada integrante del equipo analizó en forma individual el problema con el fin de obtener interpretaciones de la situación planteada.

- ***Paso 2:*** Realizar una lluvia de ideas





-2-

- *Al leer el problema nos damos cuenta de que la ubicación del ómnibus puede ser en el camino o puede estar en la avenida.*
- *Las velocidades de la locomotora y el ómnibus variaran sus direcciones en los diferentes casos.*
- *El camino puede estar paralela a la vía o a la avenida.*
- *El camino puede cruzar por la vía, por la avenida o por ambos.*

➢ **Paso 3:** Hacer una lista de aquello que se conoce

RESPECTO A LA AVENIDA Y LA VÍA DE FERROCARRIL

- Ambas se cruzan en la cuadra 8 de la avenida(hay una interseccion entre ellas)
- La avenida y la vía ferrea forman un angulo de 60° en dicho punto

RESPECTO AL CAMINO

- Se conoce que el camino dista 120m del punto de cruce de la av. y la via ferrea.

RESPECTO A LA LOCOMOTORA

- Se conoce la posicion (120 m) de este respecto del punto de cruce antes mencionado.
- Sentido y rapidez (60 km/h) con la que se esta alejando del punto de cruce

RESPECTO AL OMNIBUS

- El omnibus se esta acercando al punto de cruce de la avenida y la via ferrea con una rapidez de 60 km/h.

-3-

➤ ***Paso 4:*** Hacer una lista de aquello que se desconoce

Se desconoce:

- La ubicacion del ómnibus en el camino

- La orientacion de como se cerca el omnibus hacia el punto de cruce

-Distancia entre el ómnibus y la locomotora.

La ubicacion (trayectoria) del camino que dista 120 m del punto de cruce

- ***Paso 5:*** Hacer una lista de aquello que se necesita hacerse para resolver el problema.

1° Leer detenidamente el problema e interpretar los posibles casos para los datos y acotaciones que se nos plantean.

2° Entender lo que el problema nos cuestiona; para este caso los integrantes del equipo deben entender a qué se refiere el problema con " RAPIDEZ DE VARIACION DE LA DISTANCIA ENTRE EL OMNIBUS Y LA LOCOMOTORA".

3° Buscar informacion relacionado a temas que nos ayudaran a dilucidar lo descrito en el paso anterior. para este problema tuvimos que guiarnos del análisis de algunos ejemplos relacionado a rapidez de cambio y los temas que esto implica (derivacion implicita, regla de la cadena, cinematica)

4° Aplicación de los conocimientos adquiridos durante la búsqueda de información para dar solución al problema planteado.

- ***Paso 6:*** Definir el problema

Lo que pide el problema se basa en determinar la rapidez de la variación de la distancia (ya sea que aumente o disminuya con el pasar del tiempo) entre el ómnibus (con posición y orientación indefinida) y la locomotora (con posición y orientación definida). Cabe destacar que el problema planteado no especificaba la trayectoria del camino que se encuentra a 120m del punto de cruce; así también no especificaba la posición del ómnibus en dicho camino. Por ello el equipo decidió analizar el problema en el caso más general y algunos casos particulares.

- *Paso 7:* Obtener información

Para resolver el problema fue necesario conocer los siguientes temas:
- Derivación implícita
- Razón de cambio
- Cinemática

DERIVADA IMPLICITA

FUNCION IMPLICITA

Siempre es posible que una ecuación en las variable x e y, de la forma G(x,y)=0 determine a "Y" como una función implícita de "x" ("Y" no está despejada)

Sea una función $y=3x^3+4x-2$ donde *y* es función de *x*. Esta ecuación se puede escribir como $2=3x^3+4x-y$ e incluso como $6x^3+8x-2y=4$. En este caso se puede decir que *y* es una función implícita de *x* ya que está definida mediante una ecuación en donde *y*, la variable dependiente, no es dada de manera directa.

Ejemplo 1.

La función $3f(x)-4x^2=0$ está escrita de manera implícita para *x*, variable independiente, y *f(x)*, variable dependiente. Escribir la ecuación de manera no implícita.

$$f(x)=\frac{4x^2}{3}$$

Muchas veces, al tener una ecuación escrita de manera implícita, ésta puede representar una o más funciones.

Ejemplo 2.

Sea $\frac{y}{3}-\frac{x}{y}=6$, escribir la ecuación de manera no implícita y determinar la o las funciones que describe.

- 6 -

$$\frac{y^2-3x}{3y}=6$$
$$y^2-3x=18y$$
$$y^2-18y-3x=0$$

Para poder despejar *y* como función de *x*, habría que resolver la fórmula general.

$$y=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4(1)(-3x)}}{2(1)}$$

$$y=\frac{18\pm\sqrt{324+12x}}{2}=\begin{cases}\dfrac{18+\sqrt{324+12x}}{2}\\[2mm]\dfrac{18-\sqrt{324+12x}}{2}\end{cases}$$

Este resultado implica que tenemos dos funciones de *x* descritas por la misma ecuación.

En muchos casos, no es sencillo o práctico el despejar *y* para encontrar la o las funciones dadas, por lo tanto, y dado que las funciones existan y sean derivables, se puede resolver la derivada sin necesidad de tener la función expresada en su forma clásica.

REGLA DE DERIVACION

La aplicación de la definición trae consigo la siguiente generalización: para determinar la derivada implícita basta considerar a "y" como una función de "x", y procedemos a derivar término a término, respecto a "x", la expresión G(x,y)=0; despejando finalmente la derivada pedida.
Para llevar a cabo el proceso anterior debemos tener en cuenta lo siguiente:

a) si consideramos a "y" como función de "X":

b) Si consideramos a "x" como función de "Y":

Ejemplo 3.

Sea la función $y^3-2xy+7=3x+1$, hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En éste ejemplo, se utilizará la notación $y'=\frac{dy}{dx}$ para simplificar el manejo de la ecuación, así como acostumbrar al lector a diferentes formas de escritura.

7

Se busca la derivada de la expresión $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$. De la regla de la cadena, se sabe que $\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{df}{dx}\frac{du}{dx}$, lo cual puede expresarse para potencias como $\frac{d}{dx} u^n(x) = u^{n-1}\frac{du}{dx}$. Por lo tanto, $\frac{d}{dx} y^3 = (y^3) = 3y^2 y'$. En cuanto al segundo término, éste cuenta con un producto de dos funciones, por tal, $(2xy)' = y(2x)' + 2xy' = 2y + 2xy'$.

$$3y^2y' - 2y - 2xy' = 3$$
$$3y^2y' - 2xy' = 3 + 2y$$
$$y'(3y^2 - 2x) = 3 + 2y$$
$$y' = \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}$$

Ejemplo 4.

Encontrar la derivada de *y* suponiendo que la ecuación $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$ describe una función derivable y que *y=f(x)*.

$$(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$$
$$3(2y^2 + 3)^2 (4yy') = 15x^2 - 3$$
$$12yy'(2y^2 + 3)^2 = 15x^2 - 3$$
$$y' = \frac{15x^2 - 3}{12y(2y^2 + 3)^2}$$

RAZON DE CAMBIO

El concepto de razón de cambio se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a cero.

La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo. Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la distancia y el tiempo. De acuerdo a cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, podemos conocer cuál es su velocidad.

Supongamos que un automóvil recorre 100 kilómetros en dos horas. La razón de cambio existente entre ambas variables es 50 kilómetros por hora. Ese valor representa su velocidad, ya que v = d / t (velocidad = distancia / tiempo).

- 8 -

A partir del conocimiento de una razón de cambio, es posible desarrollar diferentes cálculos y previsiones.

Ejemplo 5.

Un cuerpo es remolcado hacia un muelle, por medio de un cable que se esta enrollando en una polea, con una rapidez de 5 pies/s. La distancia que va desde la polea hasta un punto que se encuentra debajo de él (y está al nivel del cuerpo) es de 18 pies; determinar la rapidez con la que el cuerpo se está acercando al muelle, cuando se encuentra a 24 pies del punto que se encuentra debajo de la polea.

Resolución:

En el momento t definimos las variables:

x = distancia recorrida por el cuerpo; s = distancia del cuerpo a la polea.

Por dato: $\frac{ds}{dt} = 5$. Piden: $\frac{dx}{dt} = ?$ cuando $x = 24$.

Relacionando las variables $s^2 = x^2 + 18^2$

Derivando respecto a t: $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt}$ .... (1)

Para $x = 24$, tenemos. $s = 30$, en (1): $s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 30(5) = 24\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{25}{4}$.

La rapidez con la que el cuerpo se está acercando al muelle, cuando se encuentra a 24 pies del punto que se encuentra debajo de la polea, es de $\frac{25}{4}$ pies/s.

Ejemplo 6.

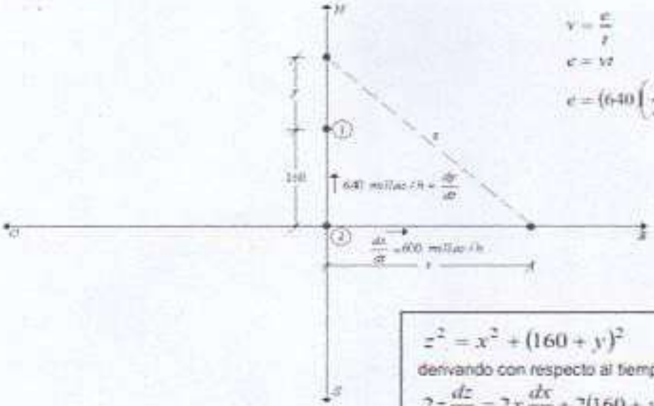
Un aeroplano que vuela al norte a 640 millas/h pasa por cierta ciudad al medio día (12h00). Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 millas/h, está directamente encima de la misma ciudad 15 min más tarde. Si los aeroplanos están volando a la misma altitud, que tan rápido se están separando a la 1:15 pm (13h15).

Solución:

– 9 –

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:

Referencia: 12h15



$$v = \frac{e}{t}$$

$$e = vt$$

$$e = (640)\left(\frac{1}{4}\right) = 160$$

$$z^2 = x^2 + (160 + y)^2$$

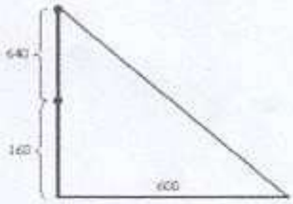
derivando con respecto al tiempo

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(160 + y)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + (160 + y)\frac{dy}{dt}}{z}$$

En 1 hora:

$$x = 600\ millas$$
$$y = 640\ millas$$
$$z = \sqrt{(600)^2 + (640 + 160)^2} = 1000\ millas$$



Por tanto: $\frac{dz}{dt} = \frac{(600)(600) + (160 + 640)(640)}{1000} = 872\ \frac{millas}{hora}$

- 10 -

Bibliografía.

Pág. Web :

www.dspace.espol.edu.ce/

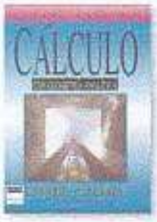
Aplicaciones de la derivada

Autor: Moisés Villena muñoz

Cálculo diferencial en una variable
Autor: Cesar Saal/ Edwin Mejía/ Miguel Meza

TEMAS: Derivada implícita pág. 360 – 372
Razón de cambio pág. 390 - 410

Análisis matemático 1
Autor: A. venero B.
TEMAS: diferenciación implícita pág.: 438- 441
Razón de cambio pág.: 449 - 456



Calculo con geometría analítica
Autor: Edwards y Penney
TEMA: La derivada y las razones de cambio pág.: 95 - 104

Ingenieria mecánica
Autor: R.C. Hibebeler
Tema: cinemática (aplicaciones)

➢ *Paso 8:* Presentar resultado

a) cuando el ómnibus se encuentra en la avenida existen cuatro casos

- ***cuando: □=120°***

para: a.1), a.2) y $s^2 = x^2 + y^2 + xy$

y=120m, en los cuatro casos tenemos que darle algún valor a x y así nos dará el valor de s.

$$v_{□} = \frac{2xv_x + 2yv_y + yv_x + xv_y}{2d}$$

a.1)

$$v_x = -60km/h$$

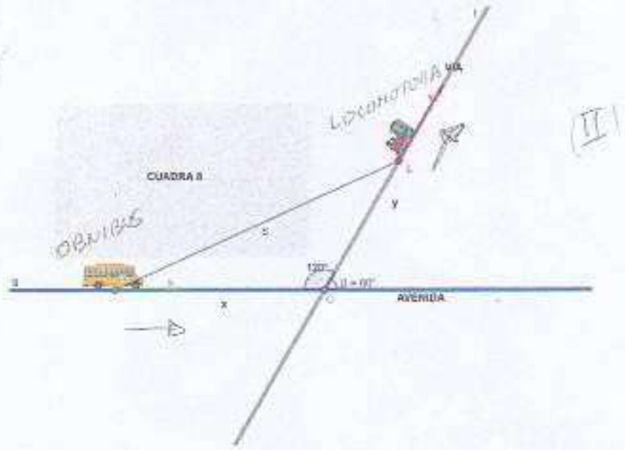
$$v_y = 80km/h$$

$$v_{□} = \frac{-20x + 6000}{s}$$

a.2)

$$v_x = -60km/h$$

$$v_y = -80km/h$$



$$v_{□} = \frac{-100x - 13200}{s}$$

12

- ***cuando: □=60°***

para a.3), a.4) y $s^2 = x^2 + y^2 - xy$

$$v⍰ = \frac{2xv_x + 2yv_y - yv_x - xv_y}{2d}$$

a.3)

$v_x = 60km/h$

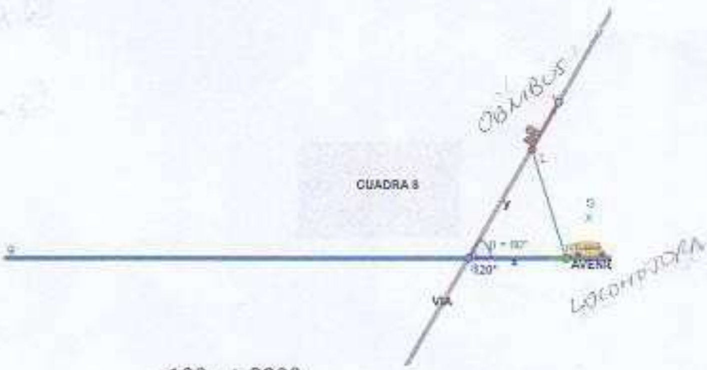
$v_y = -80km/h$

$$v⍰ = \frac{100x - 6000}{s}$$

a.4)

$v_x = -60km/h$

$v_y = 80km/h$



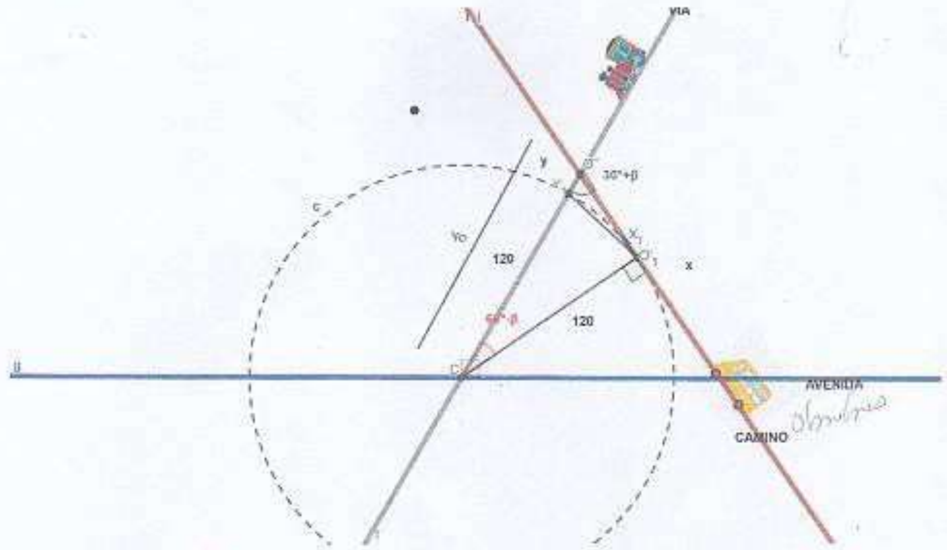
$$v⍰ = \frac{-100x + 3200}{s}$$

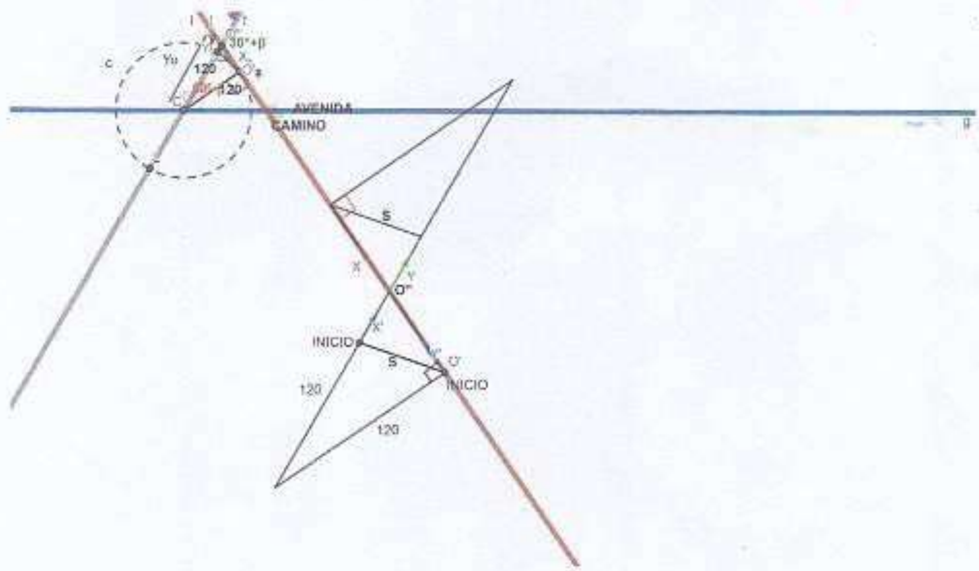
b) cuando el ómnibus se encuentra en el camino

CASO GENERAL

-13-

b.1)





Cuando el ómnibus pasa por el camino, este no está definido en el problema por lo que tomamos caminos tangentes a la circunferencia de **radio 120 m** que vendría a ser la distancia del punto de intersección **C** al **CAMINO.**

Pero la distancia de la intersección entre la avenida y el riel al camino es constante e igual a 120m. La cual existe muchas opciones por donde puede pasar el camino. Generando que el camino pase tangente a la circunferencia de radio 120m.

Piden:

$$\frac{ds}{dt}$$

$$s^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\Theta + 30°)$$

$$2s.\frac{ds}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt} - 2\left(y.\frac{dx}{dt} + x.\frac{dy}{dt}\right)\cos(\Theta + 30°) \quad \ldots\ldots(1)$$

Sabiendo que β es constante.

Donde mi referencia es O'', donde: $y = y_0 - 120$

$$y_0 = 120\sec(60 - \beta)$$

$$y = 120\,(\sec(60 - \beta) - 1) \;\ldots\ldots(2)$$

$$x = 120\tan(60 - \beta)\ldots(3)$$

$$\frac{dx}{dt} = 120sec^2(60 - \beta)$$

$$\frac{dx}{dt} = -120sec^2(60 - \beta)\ldots(4)$$

$$\frac{dy}{dt} = 120\,(\sec(60 - \beta)\tan(60 - \beta)$$

$$\frac{dy}{dt} = 120\,(\sec(60 - \beta)\tan(60 - \beta))\ldots(5)$$

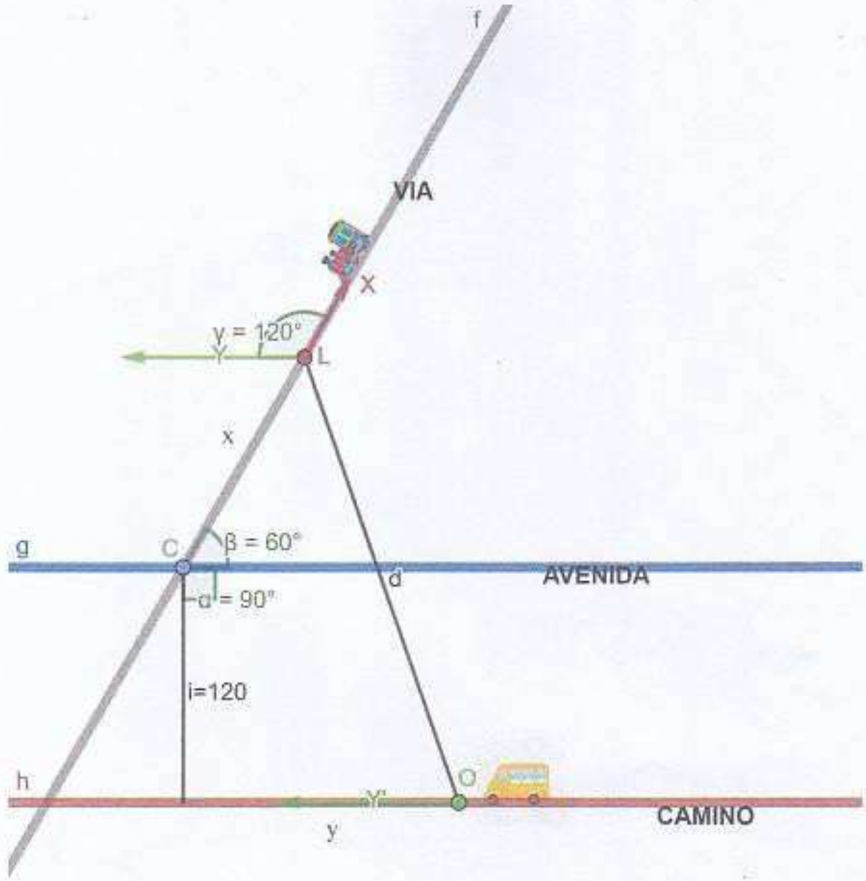
Reemplazando en (2), (3),(4) y (5) en la ecuación (1) se obtiene la ecuación

$$\frac{ds}{dt}$$

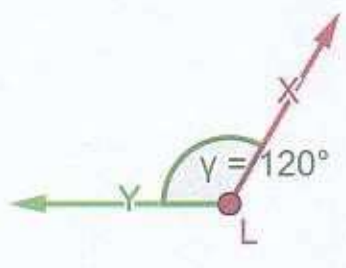
b.2)

-15-

CASOS PARTICULARES



Analizamos para el caso □=90° y cuando el CAMINO es paralelo a la avenida



en este sistema el modulo de la resultante será la distancia entre el ómnibus y la locomotora.

-16-

Aplicamos ley de cosenos

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120$$

Derivando respecto al tiempo $d^2 = x^2 + y^2 + xy$

$$2d.\frac{d(d)}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt} + x.\frac{dy}{dt}$$

$$2dv\square = 2xv_x + 2yv_y + yv_x + xv_y$$

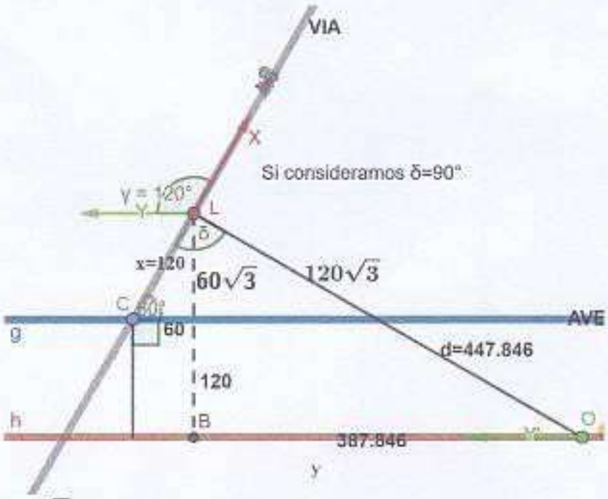
Reemplazando datos que tenemos

$$\frac{d(d)}{dt} = v\square = \frac{20y - 6000}{d}$$

(1)

b.3)

Si: δ=90° y x=120m



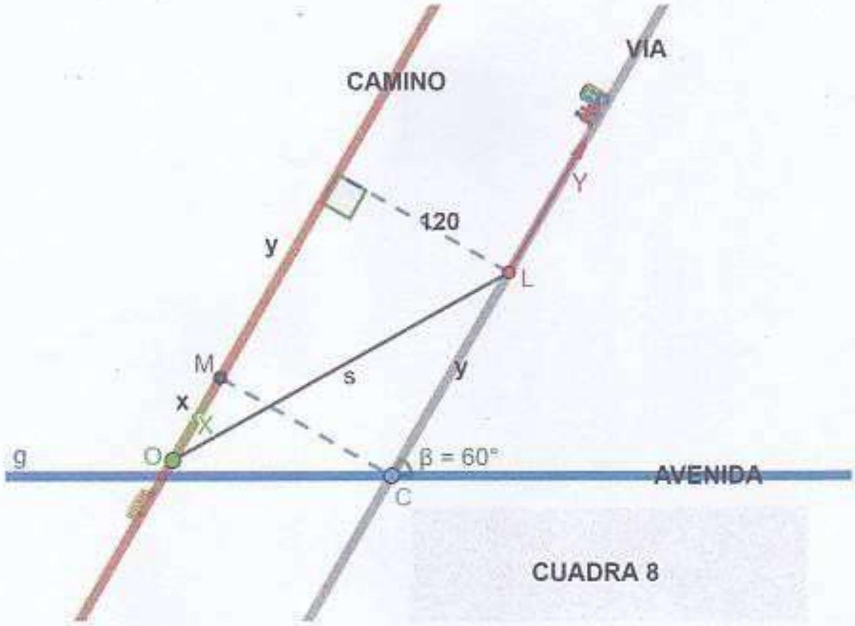
$\boldsymbol{d = 240 + 120\sqrt{3} = 447.846m}$
$y = 447.846m$

En lo hallado anteriormente en la ecuación (1)

$$\frac{d(d)}{dt} = v\square = \frac{20(446.846) - 6000}{447.846} = 6.557\text{m/s} = 23.6\text{km/h}$$

b.4)

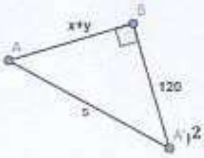
-17-



En este caso el camino es paralelo a la vía, es uno de los muchos casos del problema cuando el móvil va a la misma dirección.

$\frac{dy}{dt} = v_Y = 60km/h$

$\frac{dy}{dt} = v_x = 80\text{km/h}$



Y=120m s ***(2)***

Derivando la ecuación (2) respecto al tiempo

$$v\square = (v_x + v_Y)\frac{(x+y)}{\sqrt{(x+y)^2 + 120^2}}$$

Para obtener un valor numérico tendríamos que dar un valor a x

Considerando el valor de x=100

$$v\square = (800/36 + 600/36)\frac{(100+120)}{\sqrt{(100+120)^2 + 120^2}} = 34.14m/s$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

METODOLOGIA ABP

CURSO: MATEMATICA I

TEMA: MAXIMOS Y MINIMOS

INTEGRANTES:

AREVALO VELASQUEZ ,SERGIO

CHUQUIN COSTILLA, MORRIS

DIAZ ZAMORA, ANDY

TINEO QUISPE , ELMER

VELAZQUEZ MEDIZABAL JOSUE

ÍNDICE

OBJETIVO..1

PROBLEMA...1

MÉTODO ABP..2

PASO 1: ANÁLISIS DEL ESCENARIO DEL PROBLEMA..................................2

PASO 2: LLUVIA DE IDEAS...2

PASO 3: HACER UNA LISTA CON AQUELLO QUE SE CONOCE...................5

PASO 4: HACER UNA LISTA CON AQUELLO QUE SE DESCONOCE.............5

PASO 5: AQUELLO QUE SE NECESITA PARA RESOLVER EL PROBLEMA.........6

PASO 6: DEFINIR EL PROBLEMA..6

PASO 7: OBTENER INFORMACIÓN...7

PASO 8: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS...8

CONCLUSIONES..13

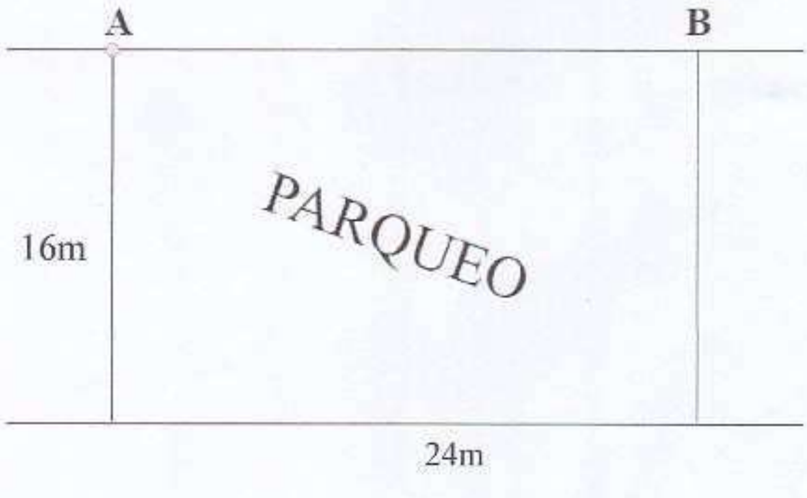
-2-

OBJETIVO:

- Aplicar el método "ABP" para resolución de problemas de Matemática I.
- Aplicar la derivación implícita para resolver problemas de razón de cambio.

PROBLEMA:

En el centro comercial Jockey, se desea realizar la conexión de agua potable a una tienda "A" ubicada en el primer piso.
El tubo principal que traslada el agua se encuentra ubicado en forma paralela a dicha tienda.
Para realizar dicha conexión se escoge la siguiente proforma de servicios, le costara 120 soles por metro si es que la conexión se realiza por la zona de parqueo (gasto en cavar colocar la tubería, cubrir y retocar la zona afectada) y solo 72 soles por metro si coloca la tubería alrededor de la zona de parqueo hasta llegar a dicha tienda.
Que recomendaciones debe dar el dueño de la tienda para optimizar sus gastos.



METODO ABP

PASO 1: ANÁLISIS DEL ESCENARIO DEL PROBLEMA.

Análisis de Elmer:

Del problema reconocemos el punto de partida y el punto de finalización luego trataremos de hallar el camino que mas nos convenga para la solución del problema, una vez planteado procedemos a hallar la solución.

Análisis de Andy:

Del problema podemos inducir que el tubo o tubería se encuentra en cualquiera de los vértices del parque, ya que son los únicos puntos conocidos y por dato del problema tiene que ser paralela a la tienda ubicada en el punto A.

Análisis de Morris:

Vemos que en problema nos faltan datos para obtener una solución única, como el saber la posición en la que se encuentra la tubería principal.

Análisis de Josue:

Del problema se puede extraer que nuevamente volvemos a tener problemas con la ubicación de la tubería principal con respecto a la tienda, de este se puede obtener varias soluciones explicadas próximamente.

Análisis de Sergio:

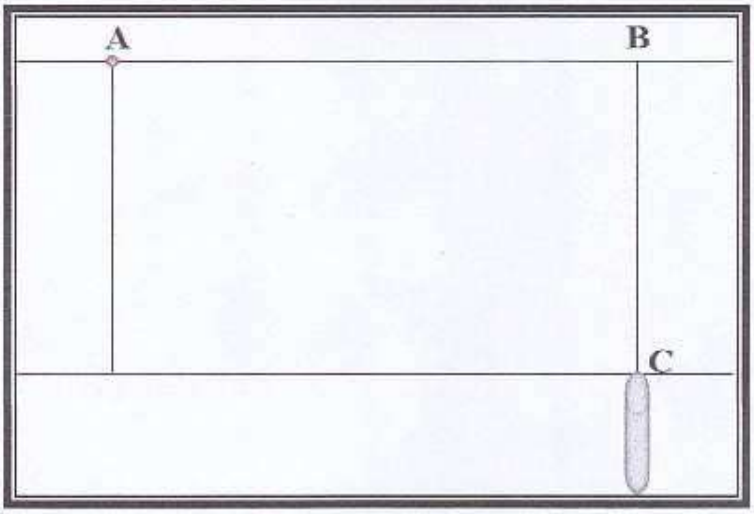
Para la observación y análisis del problema, tomamos en cuenta los principales datos: las observaciones cuando se menciona paralelismo entre la tienda A y la tubería, además de tomar por convención un punto de partida para que los tipos de soluciones para el problema no se haga muy extenso.

PASO 2: LLUVIA DE IDEAS.

A partir de lo analizado anteriormente, cada uno dio una idea en relación al problema planteado. De esta manera, entendimos que existen diversos casos para la resolución del problema.

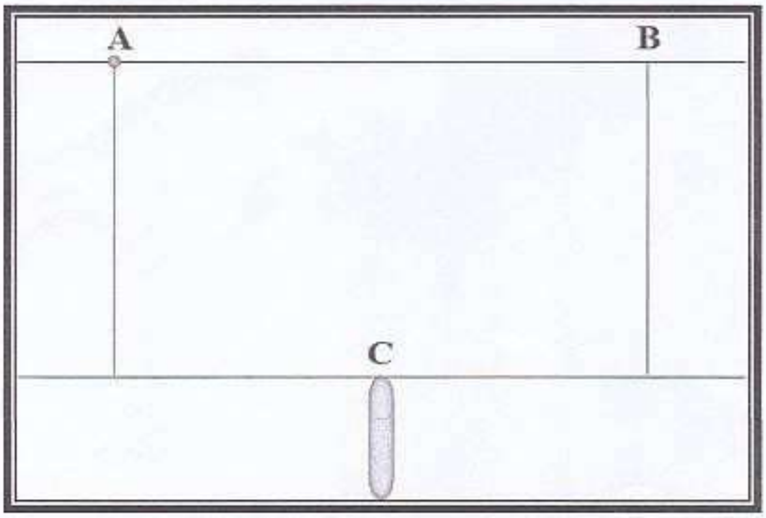
Caso 1:

Suponemos que la tubería se encuentra en el extremo del parqueo (punto C).



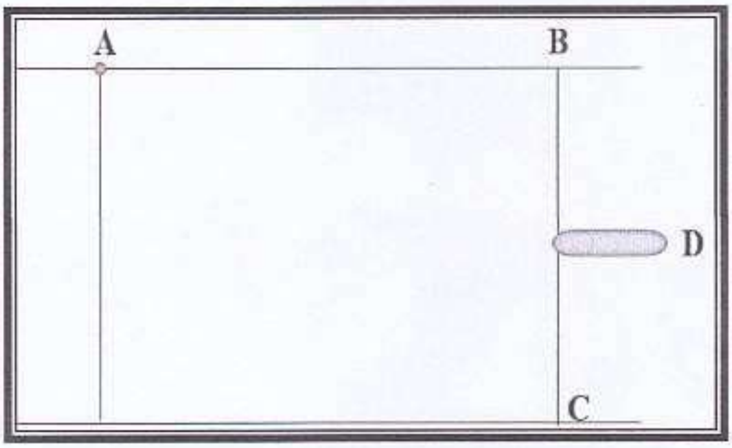
Caso 2:

Asumimos que la tubería se encuentra a la mitad del parqueo que esta al frente de la tienda A (punto C).



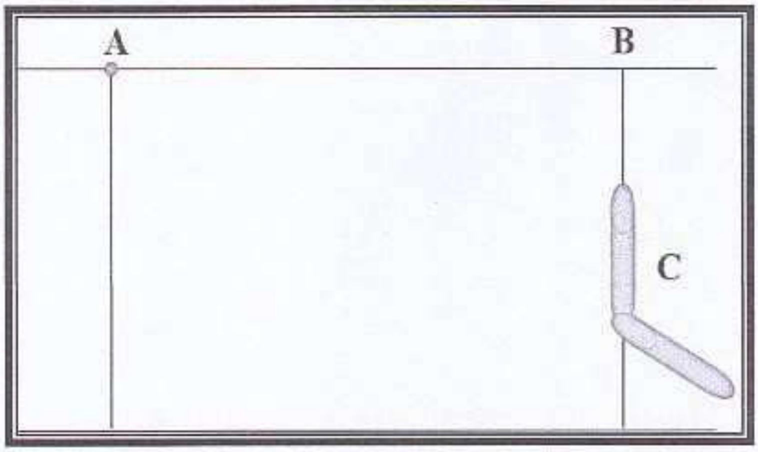
Caso 3:

Suponemos que la tubería se encuentra al medio de la dimensión más pequeña del parqueo (punto D).



Caso 4:

En este caso la tubería se encuentra obligatoriamente dentro de algún tramo del parqueo.



PASO 3: HACER UNA LISTA CON AQUELLO QUE SE CONOCE.

Del problema:

- Ubicación de la tienda "A".
- Dimensiones del parqueo: 24m x 16m
- Costo por metro en la conexión a través del parqueo: 120 soles.
- Costo por metro en la conexión alrededor del parqueo: 72 soles

Del Alumno:

- Teoria sobre "Ley de senos y cosenos"
- Propiedades trigonométricas
- Cuatro operaciones
- Teorema de Pitágoras

PASO 4: HACER UNA LISTA CON AQUELLO QUE SE DESCONOCE

Del problema:

- La posición de la tubería.
- El punto de conexión.

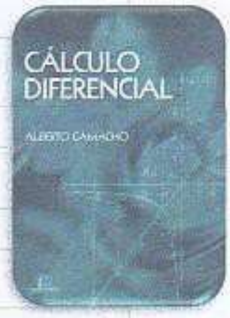
Del Alumno:

- Teoría sobre Máximos y Mínimos.

PASO 5: AQUELLO QUE SE NECESITA PARA RESOLVER EL PROBLEMA

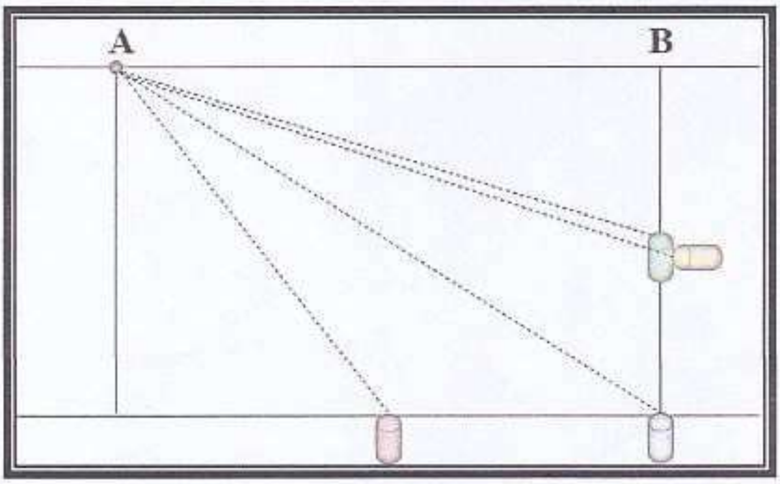
A continuación, se detallará la estrategia seguida para el desarrollo del problema.

- En primer lugar, buscamos informacion acerca del tema al cual esta relacionado el problema planteado.
- Resolvimos algunos problemas similares planteados en diferentes libros (Análisis Matemático, Calculo Diferencial, etc)
- A continuacion, planeamos analizar los casos propuestos de manera individual.
- Finalmente, aplicaremos lo aprendido y se procederá a resolver cada caso de manera independiente.



PASO 6: DEFINIR EL PROBLEMA

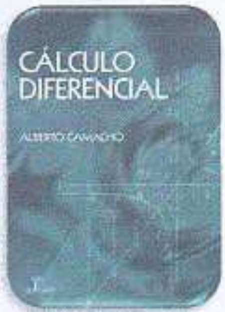
Luego de analizar el problema, como se puede observar en los pasos anteriores; realizamos un bosquejo general de lo que el problema nos pide como se puede apreciar en la figura.



Las líneas punteadas nos indican los casos que serán explicados próximamente en el siguiente paso, estos nos quieres decir que desconocemos donde realmente está la tubería y que debemos hallar el costo mínimo que debe gastar el dueño del establecimiento, para eso tenemos la teoría de Máximos y mínimos que nos ayudaran a determinar cual es el menor costo en el cual debemos realizar dicha conexión.

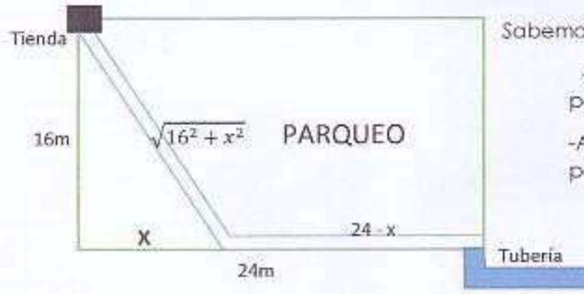
PASO 7: OBTENER INFORMACION

Las fuentes principales de información fueron libros, los cuales nos ayudaron a la compresión del tema al que pertenece este tipo de problema. Entre los libros de consulta tenemos:



PASO 8: PRESENTACION DE RESULTADOS

Solución del Caso 1:



Sabemos que:

-Zona de parqueo: 120 soles por metro.

-Alrededor de la zona de parqueo: 72 soles por metro.

Entonces el costo (C):

$$C = 120(\sqrt{16^2 + x^2}) + 72(24 - x)$$

Para hallar el costo minimo derivamos el costo e igualamos a 0;

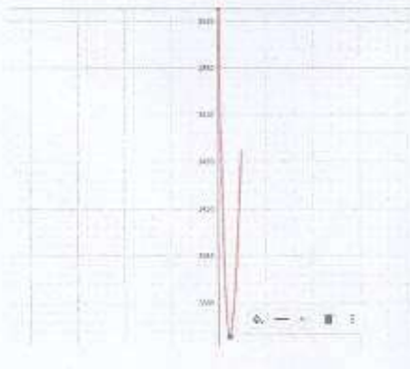
$$\dot{C} = 0 \rightarrow \dot{C} = \frac{2x}{2\sqrt{16^2 + x^2}}(120) - 72 = 0$$

$$\frac{120x}{\sqrt{16^2 + x^2}} = 72$$

$$\frac{x}{\sqrt{16^2 + x^2}} = \frac{3}{25} \rightarrow x = 12m$$

Entonces $C(12) \rightarrow será\ mínimo\ o\ máximo:$

Sin embargo, para la función costo es decreciente en $x \in [0; 12[$ y es creciente en $x \in]12; 24]$:



(12, C(12))

Quedaría:

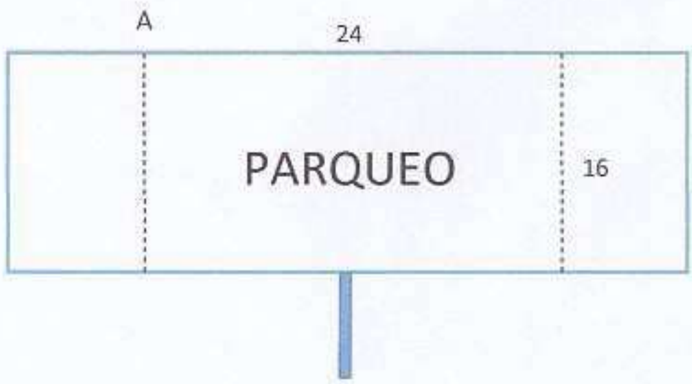
Luego pasamos a calcular el costo mínimo:

$$C = 120(20) + 72(12)$$

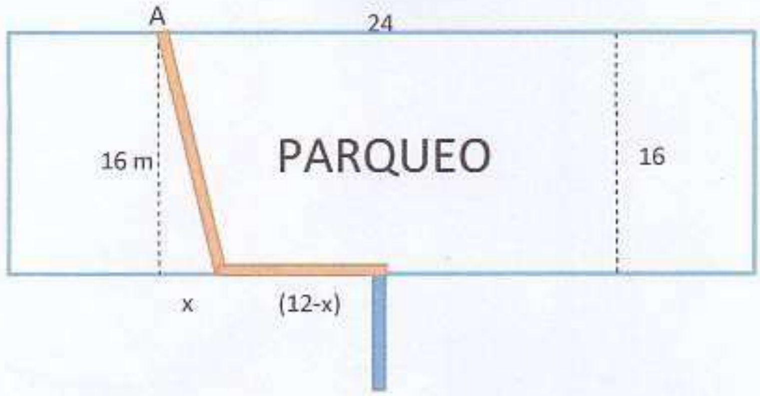
$$C = 3264\, soles$$

Solución del Caso 2:

Considerando que el punto de conexión se encuentra al medio.



Entonces ahora plantearemos una forma en la que podamos determinar a partir de una derivación el mínimo costo desde la tubería principal a la tienda A



Entonces planteamos la siguiente función:

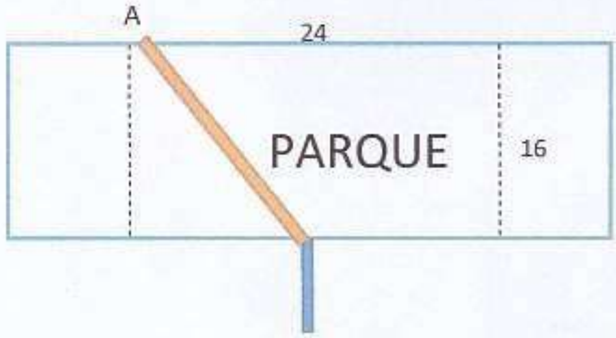
$$F(x) = (12 - x)72 + 120\left(\sqrt{x^2 + 16^2}\right)$$

Derivando e igualando a cero, tenemos el valor mínimo del coste de la tubería:

$$0 = -72x + 120(\frac{1}{2})(x^2 + 16^2)^{-\frac{1}{2}}(2)x$$

Finalmente resolviendo la ecuación nos queda que el valor de x para que se cumpla dicha ecuación es: $x = 12$

Es decir, la figura final de la tubería seria:



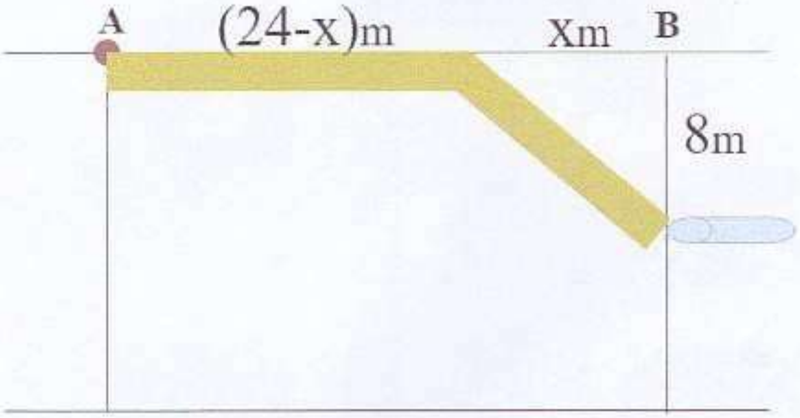
Luego pasamos a calcular el costo mínimo:

$$C = 120(12) + 72(0)$$

$$C = 1440\ soles$$

Solución del caso 3:

En este caso analizaremos el costo mínimo de la tubería, pero esta vez lo haremos desde la mitad de la otra dimensión del parqueo.



Entonces planteamos la siguiente función:

$$F(x) = (24 - x)72 + 120\left(\sqrt{x^2 + 8^2}\right)$$

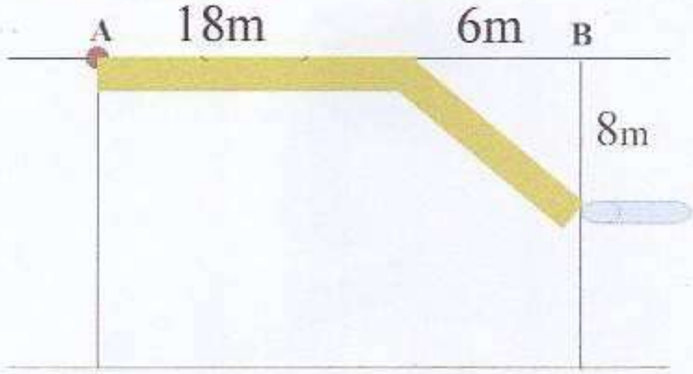
Derivando e igualando a cero, tenemos el valor mínimo del coste de la tubería:

$$0 = -72 + \frac{120x}{\sqrt{x^2 + 8^2}}$$

$$72 = \frac{120x}{\sqrt{x^2 + 8^2}}$$

Finalmente resolviendo la ecuación nos queda que el valor de x para que se cumpla dicha ecuación es: $x = 6$

Es decir, la figura final de la tubería sería:



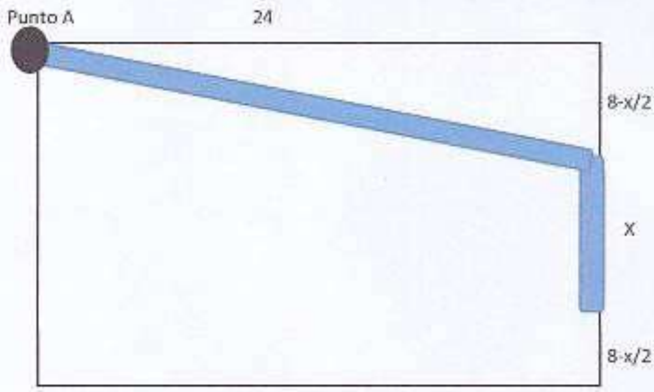
Luego pasamos a calcular el costo mínimo:

$$C = 120(10) + 72(18)$$

$$C = 2496\ soles$$

Solución del caso 4:

En este caso consideraremos que una parte de la tubería que tiene longitud x esta obligatoriamente en el tramo que se considerara para hallar el costo mínimo.



La función de la tubería seria:

$$f(x) = 72(x) + 120\sqrt{24^2 + (8 - x/2)^2}$$

Para calcular el mínimo derivamos:

$$f'(x) = 72 + \frac{60(\frac{x}{2} - 8)}{\sqrt{(8 - x/2)^2 + 576}}$$

Para $f'(x) = 0$

X=15.23

El costo será

$$f(15.23) = 3403.09$$

CONCLUSIONES:

- En el siguiente informe realizado nos damos cuenta que el problema puede ser abordado de distintas formas, y así hallar varios costos mínimos, gracias a este informe se pudo acceder a varios resultados de los cuales todos son correctos ya el problema es impreciso.